Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 135.

In vier Heften.

Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1909.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 135.

Ritz, Walter, Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik . . . . . Seite 1

v. Dávid, Ludwig, Zur Theorie der *Schapira*schen Iteration . . . . . — 62

Haentzschel, E., Über eine von *Hermite* herrührende Substitution zur Reduktion des elliptischen Integrals erster Gattung auf die *Weierstrass*sche Normalform . . . . . — 75

Hessenberg, Gerhard, Kettentheorie und Wohlordnung . . . . . — 81

Dickson, L. E., On the congruence $x^n + y^n + z^n \equiv 0 \pmod{p}$ . . . . . — 134

Biermann, O., Eine formale Ableitung der *Laurent*schen Reihe einer Funktion aus einer ihrer rational gebrochenen Näherungsfunktionen . . . . — 142

Friedmann, A., und **Tamarkine, J.,** Quelques formules conçernant la theorie de la fonction $[x]$ et des nombres de *Bernoulli* . . . . . — 146

Neumann, C., Über einige Reihen-Entwicklungen, die nach Produkten von Kugelfunktionen fortschreiten . . . . . — 157

Dickson, L. E., Lower limit for the number of sets of solutions of $x^e + y^e + z^e \equiv 0 \pmod{p}$ 181

Bohl, P., Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem . . . . . — 189

Thue, Axel, Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen . . . . . — 284

Fischer, Ernst, Verallgemeinerung des *Sylvester*schen Determinantensatzes . — 306

196054

Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik.

Von Herrn *Walter Ritz* in Göttingen.

Einleitung.

Die Randwertaufgaben der mathematischen Physik erfordern durchweg die Darstellung endlicher, stetiger Funktionen in vorgeschriebenen endlichen Bereichen. Nur ausnahmsweise gelingt hier eine Entwicklung nach Potenzreihen, und noch seltener ist dieselbe im ganzen Bereich numerisch brauchbar. Endlich scheitert, selbst in Fällen, wo die Entwicklung prinzipiell möglich wäre, ihre Berechnung häufig an dem Umstand, daß sie die Lösung unendlich vieler linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten erfordert. Sehr viel besser eignen sich Entwicklungen nach Polynomen, *Fourier*sche Reihen usw. für die Darstellung einer reellen Funktion $w(x, y, \ldots)$ *in einem gegebenen Bereich,* da hier für die Konvergenz im ganzen Bereich nur Eigenschaften der Stetigkeit usw. gefordert werden, die bei den Randwertaufgaben meist erfüllt sind. Bei numerisch gegebenem w bietet die Bestimmung der Koeffizienten eines Polynoms $w_n = a_0 + a_1 x + \cdots$ von gegebenem Grade n, derart, daß w_n als Approximation von w gelten könne, keinerlei Schwierigkeit, und es kann die Genauigkeit bei genügend großem n unbegrenzt gesteigert werden. *Ist aber w als Integral einer Differentialgleichung, unter gewissen Nebenbedingungen, definiert,* so gelingt die Berechnung der Koeffizienten a_i zunächst nur in dem sehr speziellen Fall, wo eine Integration durch rasch konvergente Potenzreihen möglich ist. Es erhebt sich die Forderung, die *angenäherte Darstellung des Integrals im ganzen vorgeschriebenen Bereich durch ein Polynom von gegebenem Grade n auch in diesem Falle allgemein durchzuführen, in der Art, daß bei wachsen*

dem n die Genauigkeit unbegrenzt wachse, so daß schließlich eine Entwicklung des Integrals nach Polynomen resultiert.

Dabei wird man n klein wählen können, falls die Erfahrung uns z. B. zeigt, daß die gesuchte Kurve nur schwach gekrümmt ist.

Auch *Fourier*-Reihen usw. können brauchbar sein; allgemeiner kann man meist derartige Funktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n, \ldots$ angeben, daß die etwa durch Beobachtung bekannte Funktion w von $x, y, \ldots$ in der Form

$$(1.) \qquad w_n = \psi_0 + a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \cdots + a_n\psi_n,$$

auch wenn n klein bleibt, durch geeignete Wahl der unbestimmten Koeffizienten a_i mit genügender Genauigkeit dargestellt werden kann. Wieder stellt sich die eben für Polynome aufgeworfene Frage ein.

Gegenstand dieser Abhandlung ist die Angabe einer Methode zur Bestimmung der a_i unter der Voraussetzung, daß es sich um ein Variationsproblem handle, eine Forderung, die ja bei einer großen Anzahl physikalischer und mechanischer Probleme erfüllt ist. Kann, bei geeigneter Wahl der ψ_i, die Genauigkeit mit wachsendem n unbegrenzt gesteigert werden, so ist damit die Integration des Problems, und zwar in einer für die Anwendung besonders brauchbaren Gestalt, geleistet.

Beschränken wir uns zunächst auf eine unabhängige Variable und ist

$$(2.) \qquad J = \int_a^b f(x, w, w', w'', \ldots w^{(\sigma)})\, dx$$

das zu variierende Integral, so läßt sich das Verfahren zur Berechnung der a_i in folgender allgemeiner, wenn auch zunächst noch etwas unbestimmter Form aussprechen:

Man setze den Ausdruck (1.) *von w_n in f an Stelle von w; dann wird das Integral eine bekannte Funktion $J_n(a_1, a_2, \ldots a_n)$ der a_i, die x nicht enthält. Man bestimme die a_i so, daß J_n ein Extremum werde, also aus dem Gleichungssystem*

$$(3.) \qquad \frac{\partial J_n}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial J_n}{\partial a_2} = 0, \ldots \quad \frac{\partial J_n}{\partial a_n} = 0$$

Es ist dabei vorausgesetzt, daß die ψ_i so gewählt sind, daß w_n die vorgeschriebenen Nebenbedingungen — soweit dieselben sich nicht aus der Variation selbst ergeben*) — für jeden Wert der a_i erfüllt. Läßt das System (3.) eine und nur eine Lösung $a_1=\alpha_1^{(n)}$, $a_2=\alpha_2^{(n)}$, ... $a_n=\alpha_n^{(n)}$ zu, so ist

$$(4.) \qquad w_n(x)=\psi_0+\alpha_1^{(n)}\psi_1+\alpha_2^{(n)}\psi_2+\cdots+\alpha_n^{(n)}\psi_n$$

die *bestmögliche Darstellung von* w, falls man als Maß der Genauigkeit das Integral J selbst betrachtet. Dieses wird in der Tat bei der angegebenen Bestimmung der a_i möglichst wenig von seinem exakten Minimal- oder Maximalwert $J^{(0)}$ abweichen. Da bei physikalischen und mechanischen Problemen J in einfachem Zusammenhang mit wichtigen Größen, nämlich der potentiellen und kinetischen Energie steht, z. B. im Falle des Gleichgewichts gleich der ersteren ist, so ist es wohl berechtigt, diese für den Vorgang wesentliche Größe als Maß des Gesamtfehlers zu betrachten.

Die vorausgesetzte Beschränkung auf *eine* Variable x und auf *eine* unbekannte Funktion w ist natürlich ganz unwesentlich, und es erweist sich, wie man im folgenden sehen wird, diese Methode der Bestimmung der a_i sowohl theoretisch wie auch praktisch als eine durchaus zweckmäßige.

Bei den Randwertaufgaben der mathematischen Physik handelt es sich meist um lineare Differentialgleichungen. Es ist dann J_n eine Funktion zweiten Grades der a_i und die Gleichungen (3.) werden linear. In allen Fällen, wo unter dem Integralzeichen J eine *definite Form steht* — wie dies insbesondere bei Gleichgewichtsproblemen, beim *Dirichlet*schen Problem usw. der Fall ist — *existiert eine und nur eine Lösung des Systems* (3.). Die Werte eines solchen Integrals besitzen für alle den Bedingungen genügende Funktionen eine obere oder untere Grenze — ob sie wirklich erreicht wird, bleibt zunächst unbekannt. Bildet man nun die sukzessiven Approximationen $w_1=\psi_0+\alpha_1^{(1)}\psi_1$; $w_2=\psi_0+\alpha_1^{(2)}\psi_1+\alpha_2^{(2)}\psi_2$ usw., und die entsprechenden Minimalwerte $J_1^{(0)}$, $J_2^{(0)}$, $J_3^{(0)}$ ...., so bilden die letzteren eine immer ab- oder immer zunehmende Reihe von Zahlen, die gegen eine bestimmte Grenze konvergieren. Es zeigt sich, daß die Existenz dieser Grenze hinreicht zum Beweis, *daß die* w_n, *oder gewisse über diese Funktionen*

*) Zu dieser letzteren Art von Bedingungen gehören z. B. die an den *freien* Rändern einer elastischen Platte zu erfüllenden Gleichungen, wie aus der *Kirchhoff*schen Theorie hervorgeht.

erstreckte unbestimmte Integrale, im ganzen gegebenen Bereich gleichmäßig konvergieren. Diese Konvergenz findet selbst dann statt, wenn die ψ_i z. B. gerade Funktionen sind, während die gesuchte Lösung w eine ungerade ist: in diesem und ähnlichen Fällen konvergieren die w_n gegen eine andere Grenzfunktion. *Besitzen aber die ψ_i die oben erwähnte Eigenschaft, daß sich jede beliebige Funktion w, die den gestellten Rand- und Stetigkeitsbedingungen genügt, durch einen Ausdruck der Form* (1.) *beliebig angenähert darstellen läßt, nebst einer bestimmten Anzahl ihrer Ableitungen, so konvergieren die w_n gegen die gesuchte Lösung.* Der Beweis dieses letzteren Satzes stützt sich im wesentlichen auf die von Herrn *Hilbert**) gegebene neue Variationsmethode.

Die angegebene Methode sukzessiver Approximationen lehnt sich also aufs engste an das sog. *Dirichletsche Prinzip* an; in allen Fällen, wo sie anwendbar ist, gibt sie einen *Beweis dieses Prinzips*, da die hier getroffene besondere Auswahl der Funktionen, durch welche das zu variierende Integral J immer kleiner gemacht wird, wie oben bemerkt, einen Konvergenzbeweis ermöglicht.

Die numerische Durchführbarkeit und der praktische Wert der Methode hängen wesentlich von einer geeigneten Wahl der ψ_i ab, die natürlich durch die Resultate des Experiments, oft sehr erleichtert werden kann. In den von mir berechneten Beispielen (s. unten) sind sie durchaus befriedigend.

Die Erläuterung dieser notwendigerweise etwas unbestimmten allgemeinen Betrachtungen geschieht am besten an Hand einiger spezieller Probleme; dabei wird sich gleichzeitig zeigen, wie die ψ_i zu wählen sind, damit den Rand- und Stetigkeitsbedingungen genügt wird.

1°. Als erstes Beispiel geben die §§ 1 bis 13 die *allgemeine Lösung* der bisher nur in sehr speziellen Fällen behandelten Aufgabe, die *Deformation einer ringsum eingespannten, ursprünglich ebenen elastischen Platte von gegebener Gestalt unter der Einwirkung gegebener Druckkräfte zu berechnen.*

Es ist dies Problem äquivalent mit der Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \equiv \Delta\Delta w = f(x,y),$$

---

*) *D. Hilbert.* Über das *Dirichlet*sche Prinzip. Festschrift der Kgl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen, math.-physik. Klasse, Berlin 1901, Seite 17 ff.

wo f gegeben und am Rande $w=0$, $\frac{\partial w}{\partial n}=0$ vorgeschrieben ist (n = Normale zum Rande).

2⁰. § 13 und § 14 enthalten die Lösung des *Dirichletschen Problems* in seiner klassischen Form: Es soll die Gleichung $\Delta w=0$ unter der Voraussetzung der Stetigkeit von w, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ und bei gegebenen Randwerten $\overline{w}$ erfüllt sein.

Die Beschränkungen, die hierbei der Gestalt der Randkurve und den gegebenen Funktionen f, $\overline{w}$ auferlegt werden müssen, sind sehr allgemeiner Natur und für die Anwendungen durchaus unwesentlich.

3⁰. § 15 enthält die Anwendung der Methode auf *gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten*, die aus einem Variationsproblem entspringen, wobei die Werte des Integrals und eventuell einiger Ableitungen an den Endpunkten des Intervalls $a \dots b$ vorgeschrieben sind.

4⁰. Endlich zeigt die Anwendung auf die *schwingende Saite*, § 16, daß auch in Fällen, wo der oben angedeutete Konvergenzbeweis versagt, die Methode numerisch sehr brauchbar bleibt und sich zur Berechnung z. B. *Chladni*scher Klangfiguren usw. wohl eignet.

In der Mechanik werden bei Anwendung des *Hamilton*schen Prinzips auf ein endliches Zeitintervall die Gleichungen (3.) im allgemeinen nicht linear, und die Berechnung höherer Approximationen ist dadurch sehr erschwert. Kennt man aber eine genügend angenäherte Lösung, so wird man in diesem, wie auch in andern Fällen, die *Methode nur auf die Berechnung der Korrektionen* anwenden und sich dabei auf die quadratischen Glieder in der Entwicklung von $J_n(a_1, a_2, \dots a_n)$ in der Umgebung der Nullwerte der Variablen beschränken können.

Sind geeignete Bedingungen im Unendlichen vorgeschrieben, die von den ψ_i erfüllt werden, so daß das über ein unendlich ausgedehntes Gebiet erstreckte Integral J und die J_n endlich bleiben, so kann die Methode ebenfalls angewendet werden.

Es ist wesentlich zu bemerken, daß *die ψ_i in verschiedenen Gebieten verschiedene analytische Funktionen sein, bzw. durch verschiedene Ausdrücke gegeben sein können*, falls nur auf der Grenze zweier solcher Gebiete gewisse Stetigkeitsbedingungen (siehe z. B. § 2) erfüllt sind. Hierin liegt für die Anwendung auf experimentelle Ergebnisse unter Umständen eine große Erleichterung.

Deformation einer am Rande eingespannten elastischen Platte unter dem Einfluss eines gegebenen Normaldrucks.

§ 1.

Wir behandeln zunächst das Problem der Integration der Gleichung

$$\Delta\Delta w \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x,y), \tag{5.}$$

wobei auf dem Rand L des gegebenen Gebiets R die Bedingungen zu erfüllen sind

$$\overline{w} = 0, \quad \frac{\partial \overline{w}}{\partial n} = 0 \tag{6.}$$

und die Endlichkeit und Stetigkeit von w und seinen Ableitungen bis zur 4. Ordnung in R und auf L gefordert wird.

Das Problem reduziert sich, wie man ohne weiteres einsieht, darauf, das Integral

$$J = \iint_R \left[\frac{1}{2}(\Delta w)^2 - f(x,y)\, w\right] dS, \tag{7.}$$

welches über die ganze Platte, d. h. das ganze Gebiet R, zu erstrecken ist, unter den erwähnten Bedingungen zu einem Minimum zu machen. Es ist bis auf einen konstanten Faktor J die potentielle Energie der Deformation*) und f der auf die Platte pro Flächeneinheit ausgeübte Druck. Von f setzen wir voraus, daß es endlich und stetig ist, und daß $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ endlich sind.

*) Der *Kirchhoff*sche Ausdruck für die potentielle Energie der Platte enthält allerdings noch ein weiteres Glied, welches aber, wie zwei sukzessive partielle Integrationen zeigen, im Falle $\overline{w} = 0$, $\frac{\partial \overline{w}}{\partial n} = 0$ identisch verschwindet.

Die Ausdehnung der *Green*schen Sätze auf die Gleichung (5.) hat *Mathieu**) gegeben.

Sind U, V zwei im Gebiete R nebst ihren Ableitungen bis zur dritten Ordnung inkl. stetige Funktionen, so gilt

$$\iint_R [U\Delta\Delta V - V\Delta\Delta U]\, dS = \int_L \left[\Delta U \frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial \Delta U}{\partial n} - \Delta V \frac{\partial U}{\partial n} + U\frac{\partial \Delta V}{\partial n}\right] ds,$$

wo n die äußere Normale der Berandung L bedeutet.

Es sei (a, b) ein Punkt im Innern von R und $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$; wir setzen $V = r^2 \log r$. Diese Funktion spielt hier dieselbe Rolle wie $\log r$ in der Potentialtheorie. Dann ist

$$-8\pi U(a, b) = \iint_R r^2 \log r\, \Delta\Delta U\, dS - \int_L \left[r^2 \log r \frac{\partial \Delta U}{\partial n} - \frac{\partial (r^2 \log r)}{\partial n}\Delta U + 4 \log r \frac{\partial U}{\partial n} - 4\frac{\partial \log r}{\partial n} U\right] ds.$$

Ist also

$$\Delta\Delta U = f(x, y); \quad U = 0, \ \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \text{ auf } s,$$

so gilt

$$-8\pi U(a, b) = \iint_R r^2 \log r\, f(x, y)\, dS + \int_L \left[\Delta U \frac{\partial (r^2 \log r)}{\partial n} - \frac{\partial \Delta U}{\partial n} r^2 \log r\right] ds.$$

Ist (a, b) ein innerer Punkt, so kann man das Linienintegral beliebig oft unter dem Integralzeichen differentiieren; das Flächenintegral kann dreimal ebenso differentiiert werden, ohne daß seine Konvergenz im Punkte (a, b) aufhört. Um Derivierte höherer Ordnung zu erhalten, kann man eine Methode von *Riemann***) verallgemeinern:

---

*) *Mathieu*, Journal de Liouville XIV 1869, p. 378; Théorie du potentiel Kap. III, p. 70; Paris 1890; vgl. auch *W. Voigt*, Kompendium der theor. Physik I, S. 206, Leipzig 1895.

**) *Riemann*, Schwere, Elektrizität u. Magnetismus, herausgeg. von *Hattendorf*.

Es ist

$$\frac{\partial}{\partial a}\iint r^2 \log r\, f(x,y)\, dS = \iint \frac{\partial}{\partial a} r^2 \log r \cdot f\, dS = -\iint \frac{\partial}{\partial x}(r^2 \log r) f\, dS$$

$$= -\int_L r^2 \log r\, f \cos nx\, ds + \iint_R r^2 \log r \frac{\partial f}{\partial x} dS,$$

wobei $\frac{\partial f}{\partial x}$ endlich und f stetig sein muß. Durch Wiederholung dieser Transformation erhält man den Satz:

Wenn $\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}$ $(p=0,1,2,\ldots\mu;\ q=0,1,2,\ldots\nu)$ endlich und stetig sind — $\frac{\partial^{\mu+\nu} \cdot f}{\partial x^\mu \partial y^\nu}$ braucht nur endllich zu sein — so erhält man auf diese Weise die entsprechenden Ableitungen von U nach a und b; ferner kann man von jeder so berechneten Ableitung noch die Ableitungen erster, zweiter und dritter Ordnung durch Differentiation unter dem Integralzeichen, ohne Transformation, erhalten. *Alle Ableitungen* $\frac{\partial U^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q}$ *sind stetig und endlich, wenn* $p \leqq \mu+3;\ q \leqq \nu+3;\ p+q \leqq \mu+\nu+3$ *sind.*

Man hat ebenfalls

$$\iint_R \Delta U\, \Delta V\, dS = \iint_R V \Delta\, \Delta U\, dS + \int_L \left[\Delta U \frac{\partial V}{\partial n} - \Delta V \frac{\partial U}{\partial n}\right] ds.$$

Wendet man dies auf die Variation von J an

$$\delta J = \iint_R [\Delta w\, \delta \Delta w - f \delta w]\, dS,$$

wobei $U=w$, $V=\delta w$ zu setzen ist, so ist auf L wegen $w=0$, $\frac{\partial w}{\partial n}=0$ auch $\delta w=0$, $\frac{\partial \delta w}{\partial n}=0$, und es ergibt sich

$$\delta J = \iint [\Delta \Delta w - f]\, \delta w\, dS,$$

also die Gleichung (5.). Jede Lösung dieser Gleichung entspricht offenbar einem wirklichen *Minimum* von J.

Ferner besitzen die Werte, die J für beliebige, den Stetigkeits- und Randbedingungen genügende Funktionen w annehmen kann, *eine untere Grenze* (die möglicherweise allerdings nicht wirklich erreicht wird). Denn setzt man

$$w(a, b) = w_1 + w_2, \quad w_1 = -\frac{1}{8\pi} \iint r^2 \log r \, f(x, y) \, dS,$$

$$J_0 = \iint_R \left[\frac{1}{2} (\Delta w_1)^2 - f w_1 \right] dS + \int_L \left[w_1 \frac{\partial \Delta w_1}{\partial n} - \frac{\partial w_1}{\partial n} \Delta w_1 \right] ds,$$

so ergibt sich

$$\Delta\Delta w_2 = 0 \text{ und auf } L\text{: } w_1 = -w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial n} = -\frac{\partial w_2}{\partial n}.$$

Somit wird der Ausdruck

$$J = \iint \left[\frac{(\Delta w_1)^2}{2} + \frac{(\Delta w_2)^2}{2} + \Delta w_1 \Delta w_2 - f(w_1 + w_2) \right] dS$$

wegen

$$\iint_R \Delta w_1 \Delta w_2 \, dS = \iint_R w_2 \Delta\Delta w_1 \, dS + \int_L \left[\frac{\partial w_2}{\partial n} \Delta w_1 - w_2 \frac{\partial \Delta w_1}{\partial n} \right] ds$$

$$= \iint_R w_2 f \, dS + \int_L \left[-\frac{\partial w_1}{\partial n} \Delta w_1 + w_1 \frac{\partial \Delta w_1}{\partial n} \right] ds$$

gleich

$$J = J_0 + \frac{1}{2} \iint_R (\Delta w_2)^2 \, dS.$$

Somit ist $J \geqq J_0$, womit die Existenz einer unteren Grenze nachgewiesen ist.

Die Lösung von (5.) unter den gegebenen Bedingungen ist eindeutig bestimmt, da die Differenz zweier Lösungen w, w' ergeben würde:

$$\Delta\Delta(w-w')=0; \quad w-w'=0, \ \frac{\partial w}{\partial n}-\frac{\partial w'}{\partial n}=0 \text{ auf } L,$$

woraus durch Multiplikation mit $w-w'$ und Integration

$$\iint [\Delta(w-w')]\,dS=0.$$

Es ist somit $\Delta(w-w')=0$ in R, und da $w-w'=0$ auf L, ist überall $w-w'=0$.

Ich beschließe diese vorbereitenden Sätze durch die Bemerkung, daß aus $w=0$ auf L folgt $\frac{\partial w}{\partial s}=0$; und da auch $\frac{\partial w}{\partial n}=0$, so wird

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial n}\cos(n,x)+\frac{\partial w}{\partial s}\cos(s,x)=0; \quad \frac{\partial w}{\partial y}=0 \text{ auf } L.$$

§ 2.

Sei

$$\psi_1(x,y), \ \psi_2(x,y), \ldots \psi_n(x,y), \ldots$$

eine unbegrenzte Reihe von Funktionen, die folgenden Bedingungen genügen:

1°. Sie sind in der ganzen Ausdehnung der Platte R und auf deren Rand L eindeutige endliche und stetige Funktionen von x und y. Gleiches gilt von ihren Ableitungen der Form

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n} \qquad (m=0,1,2,3; \ n=0,1,2,3)$$

die im folgenden eine wichtige Rolle spielen und die wir abkürzend als *Hauptableitungen* bezeichnen.

2°. Auf L ist für jedes i, $\psi_i=0$, $\frac{\partial \psi_i}{\partial n}=0$.

3°. Sei ζ eine beliebige nebst ihren Hauptableitungen endliche und stetige Funktion, welche überall gleich 0 ist außer in einem Rechteck ϱ, welches ganz innerhalb R liegt, und dessen Lage und Größe willkürlich bleiben. Wir setzen voraus, daß man die Koeffizienten α_i und den Index m im Ausdruck

$$\zeta_m(x, y) = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \cdots + \alpha_m \psi_m,$$

so wählen kann, daß $\zeta - \zeta_m$ und seine Hauptableitungen in R und auf L dem absoluten Werte nach kleiner bleiben als eine willkürlich gegebene Größe ε. Man kann also eine Reihe $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_m, \ldots$ von Funktionen angeben, die gleichmäßig in R gegen ζ konvergieren, ebenso wie ihre Hauptableitungen. (Diese Annahme fordert also, daß die ψ_i die Eigenschaft der Polynome, *Fourier*-Reihen usw. besitzen, eine willkürliche Funktion darzustellen.)

4°. Eine Summe der Form ζ_m kann nur dann in R überall identisch verschwinden, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$.

Es wird unten gezeigt werden, wie bei gegebener Berandung die bekannten Eigenschaften der Polynome, *Fourier*-Reihen usw. es gestatten, solche Funktionen ψ_i zu bilden.

Um nun die gesuchten sukzessiven Approximationen zu erhalten, haben wir nur den Ausdruck

$$w_m = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 + \cdots + a_m \psi_m$$

an Stelle von w in das Integral J zu setzen; sei

$$(8). \qquad J_m = \iint_R \left[\frac{1}{2}(\Delta w_m)^2 - f w_m\right] dS,$$

dann ist J_m eine Funktion zweiten Grades der a_i, die von x, y unabhängig ist,

$$J_m = \sum_1^m \sum_1^m \alpha_{pq} a_p a_q - \sum_1^m \alpha_q a_q,$$

wo

$$(9.) \quad \alpha_{pq} = \alpha_{qp} = \iint_R \Delta\psi_p \Delta\psi_q \, dS = \iint_R \Delta\Delta\psi_p \cdot \psi_q \, dS$$

$$= \iint_R \Delta\Delta\psi_q \cdot \psi_p \, dS,$$

$$(10.) \qquad \alpha_p = \iint_R f(x, y) \psi_p \, dS.$$

Wir wählen die a_i in der Weise, daß $J_m(a_1, a_2, \dots a_m)$ ein Minimum wird, so daß also

$$(11.) \qquad \sum_{p=1}^{m} \alpha_{pq} a_p = \alpha_q. \qquad (q = 1, 2, \dots m)$$

Die quadratische Form

$$Q = \sum_1^m \sum_1^m \alpha_{pq} a_p a_q = \frac{1}{2} \iint [\Delta w_m]^2 dS$$

ist *stets positiv* und nur dann gleich Null, wenn $\Delta w_m = 0$ in R, also, wegen $w_m = 0$ auf L, wenn w_m identisch gleich Null ist. Daraus folgt nach 4^0, daß $a_1, a_2, \dots a_m$ sämtlich verschwinden müssen, falls $Q = 0$ sein soll.

Da nun J_m, wie wir gezeigt haben, eine untere Schranke J_0 besitzt, so folgt, daß J_m *ein Minimum für ein eindeutig bestimmtes Wertesystem der a_i erreicht*, die Gleichungen (11.) also stets und nur in *einer* Weise lösbar sind, d. h., daß ihre Determinante von Null verschieden ist.

Es sei nebenbei bemerkt, daß auch in Fällen, wo $J_m(a_1, a_2, \dots a_m)$ eine allgemeinere analytische Form hat, das Minimum, falls es existiert, nach einem bekannten Satz auch wirklich erreicht wird, so daß sich bei einer endlichen Anzahl von Parametern nie die Schwierigkeit einstellt, die dem *Dirichlet*schen Prinzip — wo die Anzahl der Parameter als unendlich betrachtet werden kann — anhaftet.

Sei $d' w$ das totale Differential von w in bezug auf die a_i, und

$$\zeta_m = \sum_1^m A_p \psi_p,$$

wo die A_p willkürlich sind; dann kann man $da_p = \varepsilon . A_p$ setzen (ε = unendlich kleine Größe), so daß

$$d' w_m = \varepsilon \zeta_m$$

ein Ausdruck von derselben Form wie w_m ist. Es ist

$$(12.) \quad d' J = \sum_1^m \frac{\partial J}{\partial a_p} da_p = 0 = \iint [\Delta w_m \Delta d' w_m - f d' w_m] dS,$$

woraus, wegen der von den ψ_i erfüllten Grenzbedingungen, und unter Weglassung des Faktors ε folgt

$$0 = \iint [\Delta w_m \Delta \zeta_m - f \zeta_m] dS \quad . \tag{13.}$$

oder auch

$$0 = \iint [\Delta\Delta w_m - f] \zeta_m dS. \tag{14.}$$

Setzt man insbesondere $\zeta_m = w_m$, so gibt (13.)

$$\iint_R [(\Delta w_m)^2 - f w_m] dS = 0$$

sodaß, nach (7.)

$$\text{Min } \omega_m = J_m^{(0)} = -\frac{1}{2} \iint_R [\Delta w_m]^2 dS. \tag{15.}$$

Ebenso wird man eine neue, dem Index $m+n > m$ entsprechende Approximation finden können, mit einem neuen Wertsystem a_i' der a_i. Ist

$$a_p' - a_p = \varepsilon_p (p = 1, 2, \ldots m); \; a_p' = \varepsilon_p \text{ für } p = m+1 \ldots m+n,$$

$$w_{m+n} - w_m = \varphi_{mn} = \sum_1^{m+n} \varepsilon_p \psi_p; \quad \zeta_{m+n} = \sum_1^{m+n} A_p' \psi_p,$$

so gilt ebenso für das neue Minimum $J_{m+n}^{(0)}$

$$J_{m+n}^{(0)} = \iint \left\{ \frac{1}{2} [\Delta w^m + \Delta \varphi_{mn}]^2 - f [w_m + \varphi_{mn}] \right\} dS \tag{16.}$$

$$= J_m^{(0)} + \iint \left\{ \Delta w_m \Delta \varphi_{mn} + \frac{1}{2} (\Delta \varphi_{mn})^2 - f \varphi_{mn} \right\} dS$$

und

$$0 = \iint \left\{ [\Delta w_m + \Delta \varphi_{mn}] \Delta \zeta_{m+n} - f \zeta_{m+n} \right\} dS.$$

Setzt man in letzterer Gleichung insbesondere $A'_p = \varepsilon_p$, d. h. $\zeta_{m+n} = \varphi_{mn}$, so folgt eine neue Gleichung, welche, in (16.) eingesetzt, ergibt

$$J^{(0)}_{m+n} = J^{(0)}_m - \frac{1}{2}\iint_R (\Delta\varphi_{mn})^2\, dS. \tag{17.}$$

Die Größen $J^{(0)}_1, J^{(0)}_2, \ldots$ bilden also eine *nie* zunehmende, unbegrenzte Zahlenreihe, wie a priori zu erwarten war. Da sie aber größer als J_0 bleiben, besitzen sie eine Grenze $J^{(0)} \geqq J_0$, und man kann eine Zahl M so bestimmen, daß, wenn $m > M$ und η eine noch so kleine, vorgegebene Zahl ist, für jedes n

$$2|J^{(0)}_{m+n} - J^{(0)}_m| = \iint (\Delta\varphi_{mn})^2\, dS < \eta. \tag{18.}$$

Aus dieser Ungleichung läßt sich nun die Konvergenz unserer sukzessiven Approximationen ableiten.

§ 3.

Ist

$$\varphi = \frac{\varphi_{mn}}{\sqrt{\eta}},$$

so ist nach (18.)

$$\iint_R (\Delta\varphi)^2\, dS < 1. \tag{19.}$$

Es ist aber identisch

$$\varphi(a, b) = -\frac{1}{2\pi}\iint_R \log r\ \Delta\varphi\, dS \qquad (r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2) \tag{20.}$$

für jeden inneren Punkt, weil das Zusatzglied $\int_L \left[\log r \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \log r}{\partial n}\right] ds$, welches im allgemeinen hinzukommt, hier gleich Null ist wegen $\varphi = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ auf L. Sei D das Gebiet, in welchem $|\log r| \leqq |\Delta\varphi|$, und D' dasjenige, in welchem $|\Delta\varphi| < \log r$ — letzteres enthält den Punkt $a\,b$ —, dann ist

$$2\pi|\varphi| < \iint_R |\log r||\Delta\varphi|\,dS < \iint_D (\Delta\varphi)^2\,dS + \iint_{D'} (\log r)^2\,dS$$

$$< \iint_R (\Delta\varphi)^2\,dS + \iint_R \log^2 r\,dS.$$

Das letzte Integral ist konvergent, wie man durch Einführung von Polarkoordinaten sieht, wobei $r\log^2 r$ für $r=0$ gegen Null konvergiert; es hängt von (a,b) ab; ist K sein größter Wert in R, so wird endlich

$$|\varphi| < \frac{1+K}{2\pi}$$

und somit

$$|\varphi_{mn}| = |w_{m+n} - w_m| < \frac{1+K}{2\pi}\sqrt{\eta}.$$

Die Zahl $\frac{1+K}{2\pi}\sqrt{\eta}$ ist sowohl von x, wie von y und von n unabhängig; sie kann kleiner als jede vorgegebene Zahl ε gemacht werden, da man wegen der Konvergenz von $J_m^{(0)}$ immer M so wählen kann, daß

$$\eta \leqq \frac{4\pi^2}{(1+K)^2}\varepsilon^2.$$

Dann ist für jedes $m > M$ und jedes n, x und y: $|w_{m+n} - w_m| < \varepsilon$. Hieraus folgt der Satz:

Die Funktionsreihe $w_1, w_2, w_3, \ldots$ konvergiert gleichmäßig im ganzen Gebiet R gegen eine Funktion $w(x,y)$, welche somit in R stetig ist, und auf dessen Rand L verschwindet.

Damit ist zwar die Konvergenz unserer sukzessiven Approximationen bewiesen; da wir aber von der Voraussetzung (3.) bisher keinen Gebrauch gemacht haben, wird die Funktion w von der gesuchten Lösung, bei besonders unzweckmäßiger Wahl der ψ_i, möglicherweise sehr verschieden sein. Hat man für die ψ_i z. B. gerade Funktionen gewählt, während die Lösung eine ungerade Funktion ist, so kann w natürlich nicht die Lösung sein. Es ist aber bemerkenswert, daß der bloße Umstand, daß wir die unendliche Anzahl Konstanten, über die wir verfügen, nach dem angegebenen Schema bestimmen, für sich allein schon unter allen Umständen die Konvergenz

erzwingt. Daß, wie wir zeigen werden, die *richtige Grenzfunktion* w herauskommt, falls die w_m nach Analogie der Polynome, der *Fourier*-Reihen usw. nahezu beliebige Funktionen darzustellen vermögen, ist von vornherein zu erwarten. Diese Bedingung ist aber keine notwendige, besonders wenn es sich nur um die Erreichung eines bestimmten Maßes von Genauigkeit handelt: es kann, wie bei semi-konvergenten Reihen, für ein bestimmtes m ein Optimum der Annäherung stattfinden. Bei numerischen Anwendungen hat man meist nicht dafür zu sorgen, daß der gemachte Ansatz

$$(21.) \qquad a_1\psi_1+a_2\psi_2+\ldots a_n\psi_n$$

jede Funktion *beliebig genau* interpoliere, sondern daß er eine Funktion von der Art der gesuchten Lösung, und mit der vorgeschriebenen Genauigkeit, darzustellen imstande sei.

Aus dem Umstande, daß das Integral (18.) mit wachsendem m unendlich klein wird, kann man natürlich keineswegs darauf schließen, daß auch der Integrand $(\Delta\varphi_{mn})^2=(\Delta w_{m+n}-\Delta w_m)^2$ diese Eigenschaft besitze, und somit daß die Ableitungen erster und zweiter Ordnung ebenfalls konvergieren. Allerdings wird man aber, bei Polynomen usw., in den in der Anwendung vorkommenden Fällen kaum auf Funktionen geführt werden, die in einzelnen Punkten endlich bleiben, im größten Teil des Gebiets R aber unendlich klein werden, wie dies nötig ist, damit das Integral ebenfalls unendlich klein sei. Es wird vielmehr der Integrand selbst klein bleiben, und somit werden auch die ersten und zweiten Ableitungen durch $\frac{\partial w_m}{\partial x}$, ..., beliebig angenähert dargestellt sein. Kann aber jede den Rand- und Stetigkeitsbedingungen genügende Funktion nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen innerhalb R durch einen Ausdruck der Form (21.) und seine Ableitungen beliebig genau dargestellt werden, so kann die untere Grenze der $J_m^{(0)}$ nicht verschieden sein von der unteren Grenze von J für beliebige, den Bedingungen genügende Funktionen, und die Grenzfunktion w ist in diesem Falle die gesuchte Lösung.

Im folgenden werden wir durch Hinzuziehen der noch nicht benutzten Bedingung 3^0 Seite 10 den strengen Beweis erbringen, daß $\lim w_m$ die gesuchte Lösung ist. Diese Bedingung 3^0 fordert allerdings etwas mehr als für die numerischen Anwendungen im allgemeinen nötig ist.

Es läßt sich zunächst noch allgemein zeigen, daß, unter α, β ein innerer Punkt von R verstanden, auch die Grenzwerte existieren

$$\lim_{m=\infty} \frac{\partial}{\partial y} \int_a^x w_m \, dx = \frac{\partial}{\partial y} \int_a^x w \, dx; \quad \lim_{m=\infty} \frac{\partial}{\partial x} \int_\beta^y w_m \, dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_\beta^y w \, dy.$$

Der Beweis beruht wieder darauf, daß

$$\int_a^x \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} dx; \quad \int_\beta^y \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy,$$

in welchen die Integrationswege $\alpha \ldots x$, $\beta \ldots y$ innerhalb R liegen, infolge von (19.) kleiner als bestimmte, von der Gestalt der Platte allein abhängige Zahlen bleiben. Denn man kann (20.) unter dem Integralzeichen zuerst nach a integrieren, dann nach b differentiieren; nun ist

$$\frac{\partial}{\partial b} \int_a^a \log r \, da = \operatorname{arc\,tg} \frac{a-x}{b-y} - \operatorname{arc\,tg} \frac{a-x}{b-y},$$

und zwar auch wenn der Integrationsweg durch den Punkt $x=a$, $y=b$ führt, falls nur a und α verschieden sind. Da die rechte Seite stets $< 2\pi$ bleibt, so folgt

$$\left| \frac{\partial}{\partial b} \int_a^a \varphi(a, b) \, da \right| < \iint_R |\Delta \varphi| \, dS.$$

Man zerlege wieder R in ein Gebiet D, in welchem $|\Delta \varphi| \leqq 1$, und ein solches D', in welchem $|\Delta \varphi| > 1$ ist; dann folgt

$$\iint_D |\Delta \varphi| \, dS < \iint_D dS < \text{Oberfläche von } R,$$

$$\iint_{D'} |\Delta \varphi| \, dS < \iint_{D'} |\Delta \varphi|^2 \, dS < 1,$$

somit

$$\left|\frac{\partial}{\partial b}\int_a^a \varphi(a,b)\,da\right| < 1 + \text{Oberfläche von } R,$$

womit, wie oben, der Konvergenzsatz für

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_\alpha^x w_m\,dx; \quad \frac{\partial}{\partial x}\int_\beta^y w_m\,dy$$

bewiesen ist. Daß die entsprechenden Grenzfunktionen von

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_\alpha^x w\,dx; \quad \frac{\partial}{\partial x}\int_\beta^y w\,dy \tag{22.}$$

nicht verschieden sind, und somit, wenn auch vielleicht nicht w, so doch über w erstreckte Integrale erste Ableitungen besitzen, ist unmittelbar einleuchtend, da wegen der *Gleichförmigkeit* der Konvergenz für jedes Rechteck innerhalb R

$$\int_\beta^y dy \lim_{m=\infty}\int_\alpha^x \frac{\partial w_m}{\partial y}\,dx = \lim_{m=\infty}\int_\alpha^x [w_m(x,y) - w_m(x,\beta)]\,dx$$

$$= \int_\alpha^x [w(x,y) - w(x,\beta)]\,dx.$$

Da der Differentialquotient nach y der linken Seite

$$\lim_{m=\infty}\int_\alpha^x \frac{\partial w_m}{\partial y}\,dx$$

existiert, folgt, daß auch $\int_\alpha^x w(x,y)\,dx$ nach y differentiierbar und gleich dem gesuchten Grenzwert ist. Doch darf möglicherweise die Reihenfolge der Differentiation und Integration in (22.) nicht vertauscht werden.

Ebenso folgt allgemeiner aus

$$\left|\int_L \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds\right| = \left|\iint_R \Delta\varphi\,dS\right| \leqq \iint_R |\Delta\varphi|\,dS \leqq \text{bestimmte Zahl}$$

durch Anwendung auf ein innerhalb R liegendes Gebiet, welches durch ein Kurvenstück l und zwei Parallelen zu den Achsen begrenzt wird, daß

$$\int_l \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds < \text{bestimmte Zahl}$$

ist, da gleiches für die Parallelen zu den Achsen schon gezeigt worden ist. Dabei kann auch l ein Teil von L sein. Es existiert also auch die Grenze

$$\lim_{m=\infty} \int_l \frac{\partial w_m}{\partial n} ds$$

und sie ist gleich Null auf L, da hier $\frac{\partial w_m}{\partial n} = 0$ ist für jedes m.

§ 4.

Es ist nun zu zeigen, daß, wenn man über die ψ_i die in § 2 unter 3) gemachte Voraussetzung heranzieht, die *Grenzfunktion w wirklich die gesuchte Lösung ist.* Zu diesem Zweck bediene ich mich der von Herrn *Hilbert**) angegebenen Variationsmethode, in etwas veränderter Gestalt.

Seien (α, β), (x, y) innere Punkte, und sei

$$U_m(x,y) = \int_\alpha^x \int_\alpha^x \int_\alpha^x \int_\beta^y \int_\beta^y \int_\beta^y w_m(x,y)\, dx^3\, dy^3;$$

$$F = \int_\alpha^x \int_\alpha^x \int_\alpha^x \int_\beta^y \int_\beta^y \int_\beta^y f(x,y)\, dx^3\, dy^3,$$

woraus

$$\frac{\partial^6 U_m}{\partial x^3 \partial y^3} = w_m; \quad \frac{\partial^6 F}{\partial x^3 \partial y^3} = f.$$

Das rechteckige Integrationsgebiet kann zum Teil über R hinausragen; wir haben bisher w_m und f nur innerhalb R definiert, und setzen

*) *D. Hilbert*, Das *Dirichlet*sche Prinzip, a. a. O.

nun fest, daß bei dieser Integration außerhalb R überall

$$w_m = 0, \; f = 0$$

sei; die Funktion w_m und ihre Ableitungen $\frac{\partial w_m}{\partial x}$, $\frac{\partial w_m}{\partial y}$ sind somit in der ganzen Ebene stetig, da sie auf dem Rande L verschwinden.

Nach den Sätzen von § 3 konvergieren für $m = \infty$ sowohl U_m wie seine Ableitungen bis zur 4. Ordnung einschl. gleichmäßig gegen stetige Funktionen $U, \frac{\partial U}{\partial x}, \ldots \frac{\partial^4 U}{\partial x^4}$. Gleiches gilt noch von $\frac{\partial^6 U_m}{\partial x^4 \partial y^2}, \frac{\partial^6 U_m}{\partial y^4 \partial x^2}, \frac{\partial^5 U_m}{\partial x^4 \partial y}, \frac{\partial^5 U_m}{\partial y^4 \partial x}$. Die Ableitungen $\frac{\partial^7 U_m}{\partial x^4 \partial y^3} = \frac{\partial w_m}{\partial x}$, $\frac{\partial^7 U_m}{\partial y^4 \partial x^3} = \frac{\partial w_m}{\partial y}$, $\frac{\partial^6 U_m}{\partial x^3 \partial y^3} = w_m$ sind auf L gleich Null.

Die Gleichung (13.) läßt sich nun schreiben

$$(23.) \qquad 0 = \iint_R \left\{ \left[\frac{\partial^8 U_m}{\partial x^5 \partial y^3} + \frac{\partial^8 U_m}{\partial x^3 \partial y^5} \right] \left[\frac{\partial^2 \zeta_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_m}{\partial y^2} \right] - \frac{\partial^6 F}{\partial x^3 \partial y^3} \zeta_m \right\} dS.$$

Über die Konvergenz der Ableitungen, die in diese Formel eintreten, wissen wir nichts.

Durch partielle Integrationen, die den in der Variationsrechnung gebräuchlichen gewissermaßen entgegengesetzt sind, transformieren wir daher diesen Ausdruck in die Summe eines Linienintegrals und eines Flächenintegrals der Form

$$(24.) \qquad \iint_R \{ \Delta \Delta U_m - F \} \frac{\partial^6 \zeta_m}{\partial x^3 \partial y^3} \, dS.$$

Hierbei gibt das Glied $\frac{\partial^8 U_m}{\partial x^5 \partial y^3} \frac{\partial^2 \zeta_m}{\partial x^2}$ von (23.) das Linienintegral

$$\int_L \left\{ \frac{\partial^7 U_m}{\partial x^4 \partial y^3} \frac{\partial^2 \zeta_m}{\partial x^2} \cos nx + \left(- \frac{\partial^6 U_m}{\partial x^4 \partial y^2} \frac{\partial^3 \zeta_m}{\partial x^3} + \frac{\partial^5 U_m}{\partial x^4 \partial y} \frac{\partial^4 \zeta_m}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 U_m}{\partial x^4} \frac{\partial^5 \zeta_m}{\partial x^3 \partial y^2} \right) \cos (n, y) \right\} ds,$$

in welchem das erste Glied gleich Null ist, während die andern in diesem Ausdruck vorkommenden Ableitungen von U_m konvergieren.

Das Glied $\frac{\partial^8 U_m}{\partial x^5\,\partial y^3}\,\frac{\partial^2 \zeta_m}{\partial y^2}$ gibt

$$\int_L \Big\{\Big(\frac{\partial^7 U_m}{\partial x^4\,\partial y^3}\,\frac{\partial^2 \zeta_m}{\partial y^2} - \frac{\partial^6 U_m}{\partial x^3\,\partial y^3}\,\frac{\partial^3 \zeta_m}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{\partial^5 U_m}{\partial x^2\,\partial y^3}\,\frac{\partial^4 \zeta_m}{\partial x^2\,\partial y^2}\Big)\cos(n,x) - \frac{\partial^4 U_m}{\partial x^2\,\partial y^3}\,\frac{\partial^5 \zeta_n}{\partial x^3\,\partial y^2}\cos(n,y)\Big\}\,ds$$

und es gilt dieselbe Bemerkung für dieses und ebenso für die anderen Glieder. Im übrigen treten nur die Hauptableitungen von ζ_m auf. Im Flächenintegral (24.), welches sich durch diese Umformungen ergibt, konvergieren ebenfalls alle Ableitungen von U_m. Von ζ_m und seinen Hauptableitungen endlich dürfen wir nach Voraussetzung (3.) in § 2 annehmen, daß sie gegen die dort definierte Funktion ζ und ihre Hauptableitungen gleichmäßig konvergieren, wobei die Wahl von ζ noch willkürlich bleibt. Unter diesen Umständen können wir zur Grenze $m=\infty$ übergehen. Nach der Definition von ζ verschwindet das Randintegral, und es bleibt

$$(25.)\qquad \iint_R \{\Delta\Delta U - F\}\,\frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^3\,\partial y^3}\,dS = 0.$$

Auf dieses Integral läßt sich unmittelbar der *Hilbert*sche Hülfssatz (a. a. O. § 4) anwenden. Dieser Satz besagt folgendes. Wenn φ eine Funktion von x und y ist, die innerhalb eines Rechtecks ϱ den Bedingungen genügt:

1^0. Sie ist, nebst ihren Hauptableitungen innerhalb ϱ und auf dessen Seiten endlich und stetig.

2^0. Auf den Seiten, die parallel der x Achse sind, ist $\varphi=0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$; auf denjenigen, die parallel y sind, ist $\varphi=0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0$ und, wenn ferner $F(x,y)$ eine Funktion bezeichnet, die in ϱ einschließlich der Seiten stetig verläuft, und endlich das über ϱ erstreckte Integral

$$\iint F\,\frac{\partial^6 \varphi}{\partial x^3\,\partial y^3}\,dS$$

für alle diesen Bedingungen genügenden Funktionen φ verschwindet, so hat

F notwendig die Form

$$F = X + X'y + X''y^2 + Y + Y'x + Y''x^2,$$

in welcher X, X', X'' stetige Funktionen von x allein, Y, Y', Y'' stetige Funktionen von y allein bezeichnen.

Diese Bedingungen decken sich aber mit den für ζ in § 2 angenommenen, da ζ und somit seine Ableitungen außerhalb ϱ identisch verschwinden, das Integral (25.) also nur auf das Rechteck ϱ ausgedehnt zu werden braucht. Außerdem erfordert die dort vorausgesetzte Stetigkeit von ζ und seinen Hauptableitungen, daß diese auf dem Rand von ϱ verschwinden. Aus der obigen Forderung 2^0. ergibt sich aber z. B. für die Seiten parallel der x-Achse aus $\varphi = 0$ auch $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 0$ usw., und aus $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} = 0$, $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^3 \partial y} = 0$, woraus das Verschwinden aller Hauptableitungen mit Ausnahme von $\frac{\partial^6 \varphi}{\partial x^3 \partial y^3}$ auf dem Rande des Rechtecks sich ergibt. Zum Beweise des Satzes benutzt aber Herr *Hilbert* nur eine spezielle Form von φ, für welche auch $\frac{\partial^6 \varphi}{\partial x^3 \partial y^3} = 0$ ist am Rande, und ferner die weiteren Ableitungen endlich, wenn auch unstetig sind. Diese beschränkenden Voraussetzungen über φ dürfen also hinzugefügt werden, wodurch die über φ und über ζ gemachten Annahmen identisch werden, und es folgt für das Rechteck ϱ, dessen Seiten $x = a$, $x = a'$, $y = b$, $y = b'$ seien

$$(26.) \quad \Delta\Delta U - F = X(x) + y X'(x) + y^2 X''(x) + Y(y) + x Y' y + x^2 Y''(y).$$

Sei endlich

$$V = U - \int_a^x \int_a^x \int_a^x \int_a^x dx^4 [X + y X' + y^2 X''] - \int_b^y \int_b^y \int_b^y \int_b^y dy^4 [Y + x Y' + x^2 Y''] + 2 \int_{a^{(6)}}^x X'' dx^6 + 2 \int_{b^{(6)}}^y Y'' dy^6, \qquad \begin{matrix} (a \leqq x < a') \\ (b \leqq y \leqq b') \end{matrix}$$

so ergibt sich

$$(27.) \quad \Delta\Delta V = F(x, y)$$

innerhalb ϱ, wobei V und seine Ableitungen der ersten, zweiten, dritten und vierten Ordnung innerhalb ϱ und auf dessen Rande stetig und endlich sind. Man hat also

$$(28.) \qquad V(\xi,\eta) = -\frac{1}{8\pi}\iint_{\varrho} r^2 \log r\, F(x,y)\, dx\, dy + T,$$

wo T ein Linienintegral ist, welches als Funktion des innerhalb ϱ gelegenen Punktes (ξ,η) betrachtet eine analytische Funktion ist, die der Gleichung $\Delta\Delta T = 0$ genügt.

§. 5.

Wir können nun leicht beweisen, daß w wirklich die gesuchte Lösung ist, indem wir uns auf die Stetigkeitseigenschaften der Integrale partieller Differentialgleichungen stützen, die im vorliegenden Falle aus den in § 1 angeführten *Green*schen Sätzen sich ergeben. Denn da F nebst seinen Hauptableitungen, nach Definition, stetig und endlich ist, so läßt sich die Größe $\frac{\partial^6 V}{\partial\xi^3\,\partial\eta^3}$ durch die in § 1 angegebene *Riemann*sche Methode bilden, und es wird

$$\frac{\partial^6 V}{\partial\xi^3\,\partial\eta^3} = \frac{\partial^6 U}{\partial\xi^3\,\partial\eta^3} = w(\xi,\eta) = -\frac{1}{8\pi}\iint r^2 \log r\, f(x,y)\, dx\, dy + T_1,$$

wo T_1 wieder ein Linienintegral mit denselben Eigenschaften wie T bedeutet. Daraus folgt durch direkte Differentiation unter dem Integralzeichen, daß die Ableitungen erster, zweiter und dritter Ordnung von w existieren und stetig sind, und, wegen der vorausgesetzten Endlichkeit von $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, nach einer Transformation der in § 1 besprochenen Art, daß gleiches auch von den Ableitungen 4. Ordnung gilt. Endlich genügt $w(x,y)$ der Gleichung

$$\Delta\Delta w = f(x,y).$$

Da diese Sätze für jedes Rechteck ϱ innerhalb R gelten, so gelten sie inner-

halb der ganzen Platte R. Endlich ist, wie wir sahen, $w = \lim_{m=\infty} w_m = 0$ am Rande. Da außerdem die Existenz von $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ innerhalb R bewiesen ist, so folgt aus den in § 3 bewiesenen Sätzen, daß für jedes Kurvenstück l innerhalb R der Limes

$$\lim_{m=\infty} \int_l \frac{\partial w_m}{\partial n} ds,$$

dessen Existenz wir bewiesen haben, mit $\int_l \frac{\partial w}{\partial n} ds$ zusammenfällt. Nähert l sich L und fällt mit einem Stück von L zusammen, so wird der Limes $= 0$, weil $\frac{\partial w_m}{\partial n} = 0$ für jedes m; es ist also wegen der durch die Gleichmäßigkeit der Konvergenz bedingten Stetigkeit:

$$\int \frac{\partial w}{\partial n} ds = 0$$

für jedes noch so kleine Stück des Randes L; woraus folgt, daß $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ ist.

Die sukzessiven Approximationen w_m konvergieren also gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion w, welche den gestellten Grenz- und Stetigkeitsbedingungen genügt und die partielle Differentialgleichung erfüllt

$$\Delta\Delta w = f(x, y), \tag{5.}$$

also die gesuchte Lösung ist.

Allerdings wissen wir nicht, ob auch $\lim_{m=\infty} \frac{\partial w_m}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}$, usw., d. h. ob auch die Ableitungen von w konvergieren. Daß die Konvergenz auch der zweiten Ableitungen bei der größeren Anzahl der Anwendungen erwartet werden darf, ist schon bemerkt worden. Dagegen ist im allgemeinen kein Grund vorhanden, daß auch die vierten Ableitungen noch konvergieren sollten; wird somit im allgemeinen die Approximation w_m in (5.) eingesetzt, so wird diese Gleichung bei wachsendem m nicht mit wachsender Genauigkeit erfüllt sein.

Damit ist also das Problem für alle diejenigen Fälle gelöst, in welchen man Funktionen ψ_i mit den geforderten interpolatorischen Eigen-

schaften angeben kann. Wir haben nun zu zeigen, wie dies unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Gestalt der Platte möglich ist, womit der allgemeine Existenzbeweis erbracht sein wird.

§ 6.

Sei

$$F(x,y)=0$$

die Gleichung der Randkurve L. Diese Gleichung kann unter Umständen mehrere Kurven l definieren, von welchen ein Teil dem Rand nicht angehört. Dies wird der Fall sein, wenn der Rand etwa ein Polygon ist und F die Form hat

$$(29.) \qquad F_1=(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)\dots(a_r'x+b_ry+c_r)$$

Die Geraden $a_ix+b_iy+c_i=0$ werden nicht in ihrer ganzen Ausdehnung dem Rande angehören. Wir setzen voraus, daß F *innerhalb der Platte nicht verschwindet*, was für die spezielle Form (29.) bedingt, daß das Polygon ein konvexes ist.

Ferner sollen F und seine Hauptableitungen in R und auf L endlich und stetig sein. Endlich soll auf dem Rande, wo $F=0$ ist, auch $\frac{\partial F}{\partial n}=0$ sein. Erfüllt F die vorangehenden Bedingungen, aber nicht diese letzte, so wird F^2 alle Bedingungen erfüllen. Die weiteren Ableitungen $\frac{\partial^2 F}{\partial n^2},\dots$ sollen dagegen auf dem Rande nur in einzelnen Punkten verschwinden.

Diese Beschränkungen sind von geringer Bedeutung für die Anwendung auf physikalische Probleme. Bei stetig gekrümmter Randkurve wird F sie meist von vornherein erfüllen. Aber auch bei geradlinigen Polygonen und allgemeiner bei solchen Figuren, die durch mehrere Kurvenstücke begrenzt werden

$$f_1(x,y)=0,\ f_2(x,y)=0,\ \dots f_r(x,y)=0$$

wo $f_1, f_2, \dots$ analytische Funktionen sind, wird

$$F=f_1^2f_2^2\dots f_r^2$$

halb der ganzen Platte R. Endlich ist, wie wir sahen, $w = \lim_{m=\infty} w_m = 0$ am Rande. Da außerdem die Existenz von $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ innerhalb R bewiesen ist, so folgt aus den in § 3 bewiesenen Sätzen, daß für jedes Kurvenstück l innerhalb R der Limes

$$\lim_{m=\infty} \int_l \frac{\partial w_m}{\partial n} ds,$$

dessen Existenz wir bewiesen haben, mit $\int_l \frac{\partial w}{\partial n} ds$ zusammenfällt. Nähert l sich L und fällt mit einem Stück von L zusammen, so wird der Limes $= 0$, weil $\frac{\partial w_m}{\partial n} = 0$ für jedes m; es ist also wegen der durch die Gleichmäßigkeit der Konvergenz bedingten Stetigkeit:

$$\int \frac{\partial w}{\partial n} ds = 0$$

für jedes noch so kleine Stück des Randes L; woraus folgt, daß $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ ist.

Die sukzessiven Approximationen w_m konvergieren also gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion w, welche den gestellten Grenz- und Stetigkeitsbedingungen genügt und die partielle Differentialgleichung erfüllt

$$\Delta\Delta w = f(x, y), \tag{5.}$$

also die gesuchte Lösung ist.

Allerdings wissen wir nicht, ob auch $\lim_{m=\infty} \frac{\partial w_m}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}$, usw., d. h. ob auch die Ableitungen von w konvergieren. Daß die Konvergenz auch der zweiten Ableitungen bei der größeren Anzahl der Anwendungen erwartet werden darf, ist schon bemerkt worden. Dagegen ist im allgemeinen kein Grund vorhanden, daß auch die vierten Ableitungen noch konvergieren sollten; wird somit im allgemeinen die Approximation w_m in (5.) eingesetzt, so wird diese Gleichung bei wachsendem m nicht mit wachsender Genauigkeit erfüllt sein.

Damit ist also das Problem für alle diejenigen Fälle gelöst, in welchen man Funktionen ψ_i mit den geforderten interpolatorischen Eigen-

schaften angeben kann. Wir haben nun zu zeigen, wie dies unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Gestalt der Platte möglich ist, womit der allgemeine Existenzbeweis erbracht sein wird.

§ 6.

Sei

$$F(x,y)=0$$

die Gleichung der Randkurve L. Diese Gleichung kann unter Umständen mehrere Kurven l definieren, von welchen ein Teil dem Rand nicht angehört. Dies wird der Fall sein, wenn der Rand etwa ein Polygon ist und F die Form hat

$$(29.) \qquad F_1=(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)\dots(a_r^{\cdot}x+b_ry+c_r)$$

Die Geraden $a_ix+b_iy+c_i=0$ werden nicht in ihrer ganzen Ausdehnung dem Rande angehören. Wir setzen voraus, daß F *innerhalb der Platte nicht verschwindet*, was für die spezielle Form (29.) bedingt, daß das Polygon ein konvexes ist.

Ferner sollen F und seine Hauptableitungen in R und auf L endlich und stetig sein. Endlich soll auf dem Rande, wo $F=0$ ist, auch $\frac{\partial F}{\partial n}=0$ sein. Erfüllt F die vorangehenden Bedingungen, aber nicht diese letzte, so wird F^2 alle Bedingungen erfüllen. Die weiteren Ableitungen $\frac{\partial^2 F}{\partial n^2},\dots$ sollen dagegen auf dem Rande nur in einzelnen Punkten verschwinden.

Diese Beschränkungen sind von geringer Bedeutung für die Anwendung auf physikalische Probleme. Bei stetig gekrümmter Randkurve wird F sie meist von vornherein erfüllen. Aber auch bei geradlinigen Polygonen und allgemeiner bei solchen Figuren, die durch mehrere Kurvenstücke begrenzt werden

$$f_1(x,y)=0,\ f_2(x,y)=0,\ \dots f_r(x,y)=0$$

wo $f_1, f_2, \dots$ analytische Funktionen sind, wird

$$F=f_1^2f_2^2\dots f_r^2$$

allen Anforderungen genügen, falls nur die Kurven $f_i = 0$, sofern sie nicht zum Rande gehören, *außerhalb* der Platte verlaufen.

Bei *einspringenden* Winkeln, z. B. nichtkonvexen Polygonen, ist diese einfache Form von F nicht mehr anwendbar. Für ein *Sternpolygon*, dessen einspringende Ecken $P_1, P_2, \ldots P_n$ mit ausspringenden $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ in der Reihenfolge $P_1 Q_1 P_2 Q_2 \ldots$ abwechseln, setze man

$$F = r_1^6 r_2^6 \ldots r_n^6 \sin^2 \frac{\pi \varphi_1}{\alpha_1} \sin^2 \frac{\pi \varphi_2}{\alpha_2} \sin^2 \frac{\pi \varphi_3}{\alpha_3} \ldots \sin^2 \frac{\pi \varphi_n}{\alpha_n},$$

wobei r_i der Abstand des inneren Punktes (xy) vom Punkte P_i, α_i der Winkel $Q_{i+1} P_i Q_i$, und φ_i der Winkel $(xy)\, P_i Q_i$ ist. Bleibt (xy) *innerhalb* des Polygons oder auf dessen Rändern, so ist F eindeutig und erfüllt alle gestellten Bedingungen. Offenbar lassen sich solche Ausdrücke auch in allgemeineren Fällen einspringender Winkel aufstellen.

Ebenso bietet es keine Schwierigkeit, bei ringförmigen Gebieten usw., die Gleichung der Ränder auf diese Form zu bringen.

Um die *Existenz* solcher Funktionen F unter möglichst allgemeinen Bedingungen einzusehen, hat man sich nur zu erinnern, daß Herr *H. A. Schwarz* die Existenz der Fundamentallösung der Gleichung

$$\Delta u^2 + K^2 u = 0$$

unter der Bedingung, daß u auf dem Rande verschwindet und im Innern nebst $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ endlich und stetig bleibt, unter bekannten Voraussetzungen sehr allgemeiner Art über die Gestalt des Gebietes R bewiesen hat. Diese Lösung entspricht dem Fundamentalton einer Membran von der gegebenen Gestalt; sie ist innerhalb R analytisch und verschwindet in keinem Punkte im Innern von R*). Es genügt also

$$F = u^2$$

allen gestellten Forderungen, falls seine Hauptableitungen auch auf L endlich und stetig bleiben. In singulären Punkten des Randes, insbesondere bei einspringenden Ecken, können allerdings $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ und die höheren Ab-

*) *H. Weber*, Math. Annalen I, 1868.

leitungen unendlich werden. Sind $r_1, r_2, \ldots$ die Abstände eines inneren Punktes (x, y) von diesen singulären Punkten, so lassen sich dann stets ganze Zahlen $p_1, p_2, \ldots$ so bestimmen, daß

$$F = r_1^{p_1} r_2^{p_2} \ldots r_n^{p_n} u^2$$

nebst seinen Hauptableitungen auch in diesen Punkten endlich und stetig bleibt. Denn, wie man leicht einsieht, ist für ein Gebiet, welches gebildet wird durch einen Kreis vom Radius a und zwei von seinem Mittelpunkte ausgehende Radien, deren Winkel gleich α ist, u von der Form

$$u = \sin \frac{\pi \varphi}{\alpha} J_{\frac{\pi}{\alpha}}(k r),$$

wo J eine *Bessel*sche Funktion bedeutet, k die kleinste Wurzel von

$$J_{\frac{\pi}{\alpha}}(k a) = 0$$

ist, und r, φ die Polarkoordinaten eines inneren Punktes in bezug auf den Mittelpunkt als Pol und einen der zwei Radien als Achse. Somit ist, in der Nähe des Mittelpunktes,

$$u = \sin \frac{\pi \varphi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}} \{a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots\},$$

und für $\alpha > \pi$, wo der Winkel ein *einspringender* wird, werden $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ unendlich, aber nur wie die Potenz $\frac{\pi}{\alpha} - 1$ von r. Dieser Satz läßt sich leicht auf die Entwicklung von u in der Nähe eines Eckpunktes, in welchem zwei analytische Kurven zusammenstoßen, erweitern. Damit ist die Existenz von F für eine beliebige, aus einer endlichen Anzahl analytischer Kurven zusammengesetzte Begrenzung erwiesen.

Für die Anwendung wird man allerdings von dieser Konstruktion von F keinen Gebrauch machen.

§ 7.

Sei ζ die in § 2 unter 3^0 definierte Funktion. Wir setzen die Platte R in das Innere eines Vierecks Q, dessen Seiten gleich a sind. Die Funktion

$$\frac{\zeta}{F} = P(x, y)$$

ist nur innerhalb eines ganz im Innern von R gelegenen Rechtecks ϱ von übrigens willkürlicher Lage und Größe von Null verschieden. In diesem Rechteck bleibt sie stetig und endlich nebst ihren Hauptableitungen. Auf dem Rande L von R und auf den (außerhalb R gelegenen) Kurvenstücken, auf welchen F verschwindet und somit $P = \frac{0}{0}$ wird, versagt zunächst die Definition. Soll P stetig sein, so ist auch hier der Wert Null zu wählen, was wir im folgenden voraussetzen.

Unter diesen Umständen wird man P und seine Hauptableitungen innerhalb des ganzen Vierecks Q durch *Fourier*-Reihen und analoge Entwicklungen darstellen können. Denn werden zwei Seiten von Q als Koordinatenachsen gewählt, und wird die Funktion P außerhalb Q so fortgesetzt gedacht, daß sie ungerade ist in x und in y, so wird

$$P = \sum_1^\infty \sum_1^\infty b_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a},$$

$$b_{mn} = \frac{4}{a^2} \int_0^a \int_0^a P(x, y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a}\, dx\, dy.$$

Man erhält die Hauptableitungen dieser Reihe durch *gliedweise Differentiation*. Denn, da P nebst seinen Ableitungen für $x = 0$, $x = a$; $y = 0$, $y = a$ verschwindet, ergibt sich durch partielle Integrationen

$$b_{mn} = \frac{4a^4}{\pi^6 m^3 n^3} \int_0^a \int_0^a \frac{\partial^6 P}{\partial x^3\, \partial y^3} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{a}\, dx\, dy.$$

Die gleichmäßig konvergente Entwicklung von $\frac{\partial^6 P}{\partial x^3\, \partial y^3}$ ist aber

$$\frac{\partial^6 P}{\partial x^3\, \partial y^3} = \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{4}{a^2} \left[\int_0^a \int_0^a \frac{\partial^6 P}{\partial x^3\, \partial y^3} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{a}\, dx\, dy \right] \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{a},$$

sodaß durch gliedweise Differentiation in der Tat der richtige Ausdruck sich ergibt. Dies würde im allgemeinen nicht der Fall sein, wenn die Ableitungen auf den Seiten von Q nicht verschwänden. Für *eine* Variable ist diese Abschätzung der Koeffizienten wohlbekannt.

Setzen wir

$$\psi_{mn} = F \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a},$$

so werden Ausdrücke der Form

$$\sum_1^M \sum_1^M b_{mn}\psi_{mn}$$

und ihre gliedweise genommenen Hauptableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Sigma b_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a} + \frac{F\pi}{a}\Sigma m b_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a},$$

u. s. w., gleichmäßig für $m=\infty$ gegen ζ und seine Hauptableitungen konvergieren; die Funktionen ψ_{mn} verschwinden ferner auf dem Rand, nebst ihren Ableitungen $\frac{\partial\psi_{mn}}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi_{mn}}{\partial y}$. *Die Funktionen ψ_{mn} genügen somit allen den Funktionen ψ_i in § 2 auferlegten Bedingungen.* Den Grenzfall, daß ϱ mit dem Rande L einzelne Punkte oder Strecken gemeinsam hat, brauchen wir nicht in Betracht zu ziehen. Denn wir haben beim Beweise für die *gleichmäßige* Konvergenz von w_m in R und auf L die Bedingung 3^0 in § 2 nicht vorausgesetzt. Aus dieser gleichmäßigen Konvergenz folgt aber, daß wenn $\lim_{m=\infty} w_m = w$ die gesuchte Lösung ist, dieselbe auf dem Rand verschwindet, wie ja vorgeschrieben ist, nebst $\frac{\partial w}{\partial n}$. Daß die weiteren Ableitungen stetig und die Differentialgleichung erfüllt ist, braucht nur für *innere* Punkte gezeigt zu werden.

Es ist aber leicht einzusehen, daß selbst, wenn der Rand von ϱ zum Teil mit L koinzidiert, ζ/F hier gegen Null konvergiert. Denn in unmittelbarer Nähe eines Punktes des geradlinigen Randstücks, das wir vorübergehend als x-Achse betrachten, ist die abteilungsweise analytische Funktion ζ von der Form

$$\zeta = y^3 \text{ mal einer Potenzreihe in } x, y,$$

weil für $y=0$ identisch $\zeta=0$, $\frac{\partial\zeta}{\partial y}=0$, $\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}=0$ sein muß. Dagegen ver-

schwindet die ebenfalls abteilungsweise analytische Funktion F, wegen $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \neq 0$ nach Voraussetzung (außer vielleicht in einzelnen Punkten), nur wie $y^2 \cdot$Potenzreihe. Somit ist $\frac{\zeta}{F}$, einzelne Punkte vielleicht ausgenommen, auf L gleich Null, und die Ableitungen stetig und endlich. Die oben für $\frac{\zeta}{F}$ aufgestellte *Fourier*-Reihe gilt also auch in diesem Falle, und die ebengenannten singulären Punkte allein müssen eventuell an dem Rande von ϱ ausgeschlossen werden.

§ 8.

Man kann die trigonometrischen Reihen des vorigen Paragraphen durch andere Reihen, z. B. Entwicklungen nach Polynomen, ersetzen. Da sich jede Potenz von x durch *Legendre*sche Polynome P_m (einfache Kugelfunktionen) linear in bekannter Weise*) darstellen läßt und umgekehrt, ist es gleichgültig, ob man setzt

$$(32.) \qquad \psi_{mn} = \left(\frac{x}{a}\right)^m \left(\frac{y}{a}\right)^n F \text{ oder } \psi_{mn} = P_m\left(\frac{2x}{a}\right) P_n\left(\frac{2y}{a}\right) F,$$

unter a wieder die Seite des Quadrats Q verstanden. Wir benutzen die letztere Form und setzen der Einfachheit halber $a=2$. Wenn

$$(33.) \quad f(x) = \sum_0^\infty A_n P_n(x), \qquad A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x)\, dx,$$

so ist diese Entwicklung gleichmäßig konvergent von -1 bis $+1$, wenn f stetig und endlich ist und nur eine endliche Anzahl Maxima und Minima in diesem Gebiet besitzt. Die gliedweise Integration von -1 bis x gibt, wegen der Formeln

$$\frac{dP_{n+1}}{dx} - \frac{dP_{n-1}}{dx} = (2n+1) P_n; \quad P_{n+1}(-1) - P_{n-1}(-1) = 0:$$

---

*) *Legendre*, Exercices Bd. 2, S. 352. Es ist

$$x^n = \frac{1.2 \ldots n}{3.5 \ldots 2n-1} \left\{ P_n(x) + \frac{2n-3}{2} P_{n-2}(x) + \frac{(2n-7)(2n-1)}{2.4} P_{n-4}(x) + \cdots \right\}$$

$$\int_{-1}^{x} f(x)\,dx = \sum_{0}^{\infty} \frac{A_n}{2n+1} \int_{-1}^{x} \left[\frac{dP_{n+1}}{dx} - \frac{dP_{n-1}}{dx}\right] = \sum_{0}^{\infty} \frac{A_n}{2n+1} \left[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\right]$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \left\{\frac{A_{n-1}}{2n-1} - \frac{A_{n+1}}{2n+1}\right\} P_n(x),$$

also wieder eine gleichmäßig konvergente Reihe von derselben Form. Umgekehrt kann man also auch die Reihe (33.) gliedweise differentiieren, wenn $f'(x)$ denselben Bedingungen genügt wie $f(x)$. Dieser Satz läßt sich sofort auf mehrere Variable ausdehnen. Der allgemeinere Satz: Wenn $f, \frac{\partial f}{\partial x} \ldots$, $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$ in Reihen von Polynomen in x, y, entwickelbar sind, welche gleichmäßig konvergieren, so ist f selbst in eine solche Reihe entwickelbar, welche m mal nach x, und n mal nach y gliedweise differentiiert werden darf, folgt unmittelbar aus dem Umstand, daß durch gliedweise Integration jeder dieser Reihen von 0 bis x oder 0 bis y wieder Polynomreihen entstehen, da $\left(\frac{\partial^{m+n-1} f}{\partial x^{m-1} \partial y^n}\right)_{x=0}$ usw. nach Voraussetzung in solche entwickelbar sind.

Sei also innerhalb Q

$$\frac{\zeta(x,y)}{F(x,y)} = f(x,y) = \sum_{0}^{\infty} \sum_{0}^{\infty} A_{mn} P_m(x)\, P_n(y);$$

dann wird die Reihe, nach den über ζ, F gemachten Voraussetzungen, innerhalb jedes inneren Rechtecks ϱ nebst ihren Hauptableitungen gleichmäßig konvergieren, und es läßt sich somit ζ durch eine Summe der Form

$$\sum_{0}^{M} \sum_{0}^{M} A_{mn} F P_m(x) P_n(y)$$

nebst seinen Hauptableitungen beliebig genau darstellen. Die in (32.) definierten Größen ψ_{mn} genügen also allen Voraussetzungen.

Die Anwendung von Polynomen wird besonders zweckmäßig bei konvexen Polygonen. Hier kann, wie wir gesehen haben, für F ebenfalls ein Polynom gesetzt werden, und alle durch die Methode verlangten Quadraturen können explizite ausgeführt werden. Für ein Rechteck z. B. wird also w_m in der Form anzusetzen sein

$$(33.) \qquad w_{mn} = \sum_{0}^{m\ n} a_{mn}(x-a)^2(x-a')^2(y-b)^2(y-b')^2 x^m y^n,$$

wo $x=a, x=a'$; $y=b, y=b'$ die Gleichungen der Seiten des Rechtecks sind.

Besteht die gegebene Figur allgemeiner aus vier Kurvenstücken eines Orthogonalsystems

$$f_1(x,y) = \text{konst} = s_1, \quad f_2(x,y) = \text{konst} = s_2,$$

die den Werten s_1', s_2', s_1'', s_2'' der Parameter s entsprechen, so wird man die s_i als neue Variable einführen, wodurch das vorgelegte Kurvenrechteck auf ein gewöhnliches Rechteck abgebildet wird, und der Ansatz (33.) anwendbar bleibt, wenn man x durch s_1, a durch s_1', a' durch s_1'' usw. ersetzt. Allerdings wird der Integrand der potentiellen Energie J seine Gestalt ändern und eine allgemeinere quadratische Form der Differentialquotienten $\frac{\partial^2 w}{\partial s_1^2}$ usw. werden, mit variablen Koeffizienten. Dadurch wird aber die Anwendung der Methode keineswegs verändert. Die Koeffizienten der linearen Gleichungen, welche die unbekannten Größen a_i bestimmen, lassen sich in jedem numerisch gegebenen Spezialfall durch mechanische Quadratur beliebig genau finden, da sie von keinerlei veränderlichem Parameter abhängen; und die eindeutige Lösbarkeit der Gleichungen wird nach wie vor durch den Umstand bedingt, daß die quadratische Form definit ist. Daß auch der Konvergenzbeweis sich in ähnlicher Weise führen läßt, wird man an dem unten zu behandelnden Beispiel gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten erkennen.

Eine praktisch brauchbare Lösung partieller Differentialgleichungen setzte bisher meist die Auffindung gewisser, in Faktoren zerlegbarer Elementarlösungen voraus, aus deren Summation allgemeinere gebildet wurden und die nur in besonderen Fällen existieren. *Durch die Behandlung des speziellen Falles einer viereckigen Platte werde ich nun zeigen, daß auch, wenn solche Lösungen nicht bekannt sind, die neue Methode den wichtigen Vorteil bietet, numerisch brauchbare Resultate zu geben.*

§ 9.

Wir wollen die in den vorigen Paragraphen auseinandergesetzte Methode auf eine rechteckige Platte anwenden, wobei wir für die ψ_i einen neuen,

von (33.) verschiedenen Ansatz machen. Wir bemerken zunächst, daß die klassische Methode, die von einem Produkt $X(x)\,Y(y)$ auszugehen hätte, hier, wie man leicht übersieht, versagt. Dagegen führt die physikalische Analogie von selbst zu Funktionen, die die Eigenschaften der ψ_i besitzen: die Betrachtung eines an beiden Enden eingeklemmten, elastischen Stabes, gewissermaßen das Analogon zum vorgelegten Problem in *einer* Dimension, wird uns die gewünschten ψ_i in zweckmäßiger Form liefern.

Sei u die transversale Verschiebung, a die Länge des Stabes; dann ist für $x=0$ und $x=a$, $u=0$, und $\frac{du}{dx}=0$. Die Eigenschwingungen des Stabes genügen bekanntlich der Differentialgleichung

$$\frac{d^4u}{dx^4}=u\lambda^4 \quad ,$$

wozu man noch, wegen der Homogenität des Systems, die Bedingung

$$\int_0^a u^2\,dx=a$$

setzen kann: die Lösungen sind dann bis auf das Vorzeichen bestimmt, und es existieren deren für eine unendliche Anzahl von Werten von λ, nämlich für alle Wurzeln K_n der Gleichung

$$\cos K\ \mathfrak{Cof}\,K=1;\ \lambda_n=\frac{K_n}{a}. \tag{34.}$$

Die zugehörigen Lösungen sind, unter $\mathfrak{Sin}\,x$, $\mathfrak{Cof}\,x$ die hyperbolischen Sinus und Kosinus verstanden,

$$\xi_n(x)=\frac{\left(\cos\frac{K_n x}{a}-\mathfrak{Cof}\frac{K_n x}{a}\right)(\sin K_n-\mathfrak{Sin}\,K_n)-\left(\sin\frac{K_n x}{a}-\mathfrak{Sin}\frac{K_n x}{a}\right)(\cos K_n-\mathfrak{Cof}\,K_n)}{\sin K_n-\mathfrak{Sin}\,K_n}. \tag{35.}$$

Die Wurzeln von (34.) sind wenig verschieden von $\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, $n=1,2,3,\ldots$, und zwar um so weniger, je größer n ist. Sie sind von *Lord Rayleigh**) berechnet worden:

*) *Lord Rayleigh*, Theory of Sound, § 174.

$$K_1 = \frac{3\pi}{2} + 0{,}01765 = 4{,}7300; \quad K_2 = \frac{5\pi}{2} - 0{,}00078 = 7{,}8532;$$

$$K_3 = \frac{7\pi}{2} + 0{,}00003 = 10{,}9956; \quad K_4 = \frac{9\pi}{2} = 14{,}1372;$$

$$K_5 = \frac{11\pi}{2} = 17{,}2787; \quad K_6 = \frac{13\pi}{2} = 20{,}4203, \text{ usw.}$$

Man hat

$$\frac{d^4\xi_n}{dx^4} = \frac{K_n^4}{a^4}; \quad \int_0^a \xi_n \xi_m \, dx = 0 \; (n \neq m); \quad \int_0^a \xi_m^2 \, dx = a.$$

Die Lösung ξ_1 verschwindet nicht zwischen 0 und a; ξ_2 besitzt *einen* Knoten, usw.

Ebenso wie die Lösungen des Systems $\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u$, $u(0) = u(a) = 0$, nämlich sin und cos, zu Entwicklungen nach trigonometrischen Reihen führen, ist auch jede willkürliche Funktion $f(x)$ zwischen 0 und a wenigstens formal nach der Formel

$$f(x) = a_1 \xi_1(x) + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + \cdots \tag{36.}$$

entwickelbar; durch Multiplikation mit $\xi_n(x)$ und Integration von 0 bis a findet man

$$a_n = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \, \xi_n(x) \, dx. \tag{37.}$$

Die Konvergenz von (36.) läßt sich für die hier in Betracht kommenden Fälle leicht erweisen. Es genüge die Funktion $f(x)$ folgenden Bedingungen:

1°. Sie ist endlich und stetig, nebst ihren Ableitungen 1., 2. und 3. Ordnung von 0 bis a; die Ableitung 4. Ordnung bleibt endlich und besitzt nur eine endliche Anzahl von Maxima und Minima.

2°. Für $x=0$ und $x=a$ verschwinden f und $\frac{df}{dx}$.

Dann ist die Reihe (36.) *absolut und gleichmäßig konvergent und kann wenigstens 3 mal gliedweise differentiiert werden, ohne daß die Konvergenz aufhört, eine absolute und gleichmäßige zu sein.*

Durch partielle Integration findet man nämlich

$$(38.)\quad a_n = \frac{a^3}{K_n^4}\int_0^a f\,\frac{d^4\xi_n}{dx^4}\,dx = \frac{a^3}{K_n^4}\Big[f\,\frac{d^3\xi_n}{dx^3} - \frac{df}{dx}\,\frac{d^2\xi_n}{dx^2} + \frac{d^2f}{dx^2}\,\frac{d\xi_n}{dx} - \frac{d^3f}{dx^3}\,\xi_n\Big]_0^a + \frac{a^3}{K_n^4}\int_0^a \frac{d^4f}{dx^4}\,\xi_n\,dx.$$

Da f, $\frac{df}{dx}$, ξ_n, $\frac{d\xi_n}{dx}$ an den Endpunkten verschwinden, so verschwindet die Klammer. Nach dem zweiten Mittelwertsatz aber, wenn den Werten $x=\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ die Maxima und Minima von $\frac{d^4f}{dx^4}$ entsprechen, gilt

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{d^4f}{dx^4}\,\xi_n\,dx = \Big(\frac{d^4f}{dx^4}\Big)_{x=\alpha_i}\int_{\alpha_i}^{\alpha_i'}\xi_n\,dx + \Big(\frac{d^4f}{dx^4}\Big)_{x=\alpha_{i+1}}\int_{\alpha_i'}^{\alpha_{i+1}}\xi_n\,dx,$$

$$(0 \leqq \alpha_i < \alpha_i' < \alpha_{i+1} \leqq a)$$

und entsprechende Formeln gelten für die Intervalle $0\ldots\alpha_1, \ldots \alpha_p \ldots a$.

Nach (35.) aber ist

$$\Big|\int_{\alpha_i}^{\alpha_i'}\xi_n\,dx\Big| < \frac{A}{K_n},$$

wo A eine bestimmte, von n, α_i, α_i' unabhängige Zahl ist. Somit, falls L der größte Wert von $\frac{d^4f}{dx^4}$ im Intervall $0\ldots a$ bedeutet,

$$\Big|\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}}\frac{d^4f}{dx^4}\,\xi_n\,dx\Big| < \frac{2LA}{K_n}$$

und

$$\Big|\int_0^a \frac{d^4f}{dx^4}\,\xi_n\,dx\Big| \leqq \Big|\int_0^{\alpha_1}\Big| + \Big|\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\Big| + \cdots + \Big|\int_{\alpha_p}^{a}\Big| \leqq \frac{2LA(p+2)}{K_n},$$

somit, unter B eine bestimmte Zahl verstanden,

$$|a_n| < \frac{B}{K_n^5}.$$

Nun ist aber $K_n = (n+\frac{1}{2})\pi + \varepsilon_n$, wo ε_n mit $\frac{1}{n}$ gegen Null konvergiert; die Reihe (36.) konvergiert somit wie

$$\Sigma \frac{1}{n^5},$$

also sehr rasch. Die Ableitungen, nach (35.) gebildet, konvergieren langsamer: die erste wie $\Sigma\frac{1}{n^4}$, die zweite wie $\Sigma\frac{1}{n^3}$, die dritte wie $\Sigma\frac{1}{n^2}$; also auch hier noch ist die Konvergenz eine absolute und gleichmäßige, womit der Satz bewiesen ist.

§ 10.

Der eben bewiesene Satz läßt sich leicht auf Funktionen zweier Variablen ausdehnen. Sei $f(x,y)$ eine endliche, stetige Funktion; gleiches gelte von ihren Hauptableitungen und von $\frac{\partial^7 f}{\partial x^4 \partial y^3}$, $\frac{\partial^7 f}{\partial x^3 \partial y^4}$, und zwar innerhalb und auf dem Rande eines Rechtecks R, dessen Seiten $x=0$, $x=a$; $y=0$, $y=b$ seien; ferner seien f und $\frac{\partial f}{\partial n}$, somit $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, auf dem Rande gleich Null. Die Funktion f ist dann in die absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$f = \sum_1^\infty \sum_1^\infty a_{mn} \xi_m(x) \eta_n(y) \tag{39.}$$

entwickelbar, und man erhält ihre Hauptableitungen durch gliedweise Differentiation dieser Reihe. Die Funktionen ξ_m sind wie oben durch (35.) definiert, und die η_n erhält man hieraus durch Vertauschung von x mit y, a mit b, m mit n.

Man findet zunächst

$$a_{mn} = \frac{1}{ab} \iint_R f \xi_m \eta_n \, dx \, dy,$$

woraus wieder durch partielle Integration

$$a_{mn} = \frac{a^3 b^3}{K_m^4 K_n^4} \int_0^a \int_0^b f \frac{d^4 \xi_m}{dx^4} \frac{d^4 \eta_n}{dy^4} dx\, dy = \frac{a^3 b^3}{K_m^4 K_n^4} \int_0^b dy \Big[f \frac{d^3 \xi_m}{dx^3} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d^2 \xi_m}{dx^2}$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{d \xi_m}{dx} \Big]_{x=0}^{x=a} \frac{d^4 \eta_n}{dy^4} + \frac{a^3 b^3}{K_m^4 K_n^4} \int_0^a dx \frac{d\xi_m}{dx} \Big[- \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \frac{d^3 \eta_n}{dy^3} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} \frac{d^2 \eta_n}{dy^2}$$
$$- \frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial y^2} \frac{d\eta_n}{dy} \Big]_{y=0}^{y=b} + \frac{a^3 b^3}{K_m^4 K_n^4} \int_0^b \Big[\frac{\partial^6 f}{\partial x^3 \partial y^3} \xi_m \Big]_0^a \frac{d\eta_n}{dy} dy$$
$$- \frac{a^3 b^3}{K_m^4 K_n^4} \int_0^a \Big[\frac{\partial^7 f}{\partial x^4 \partial y^3} \xi_m \eta_n \Big]_0^b dx + \frac{a^3 b^3}{K_m^4 K_n^4} \iint_R \frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4} \xi_m \eta_n \, dx\, dy.$$

Aus $f(x,0) \equiv 0$ folgt $\frac{\partial^3 f(x,0)}{\partial x^3} \equiv 0$, und weitere ähnliche Gleichungen; da ferner $\xi_m(0) = \left(\frac{d\xi_m}{dx}\right)_0 = 0$, usw., verschwinden die einfachen Integrale, und es bleibt

$$a_{mn} = \frac{a^3 b^3}{K_m^4 K_n^4} \int_0^b \int_0^a \frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4} \xi_m \eta_n \, dx\, dy.$$

Unter sehr allgemeinen Umständen ist dieses Doppelintegral wieder der Form $\frac{\text{endl. Zahl}}{K_m K_n}$; insbesondere gilt dies, wenn $\frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4}$, $\frac{\partial^9 f}{\partial x^4 \partial y^5}$ stetig und $\frac{\partial^{10} f}{\partial x^5 \partial y^5}$ endlich bleibt, wie man durch eine neue partielle Integration leicht einsieht. Damit ist aber gezeigt, daß auch die gliedweise genommenen Hauptableitungen von (39.) absolut und gleichmäßig konvergieren, *und daß somit die Funktionen* $\xi_m \eta_n = \psi_i(x, y)$ *alle den* ψ_i *auferlegten Bedingungen genügen* (die Funktion ζ in § 2 darf auch den zuletzt für f gestellten Bedingungen ohne Einschränkung der Gültigkeit der früher gegebenen Beweise unterworfen werden).

§ 11.

Wir haben also einfach einen Ausdruck der Form

$$w_{MN} = \sum_1^M \sum_1^N a_{mn} \xi_m(x) \eta_n(y)$$

in das Integral J (§ 1.) einzusetzen und erhalten

$$(40.) \qquad J_{MN} = \iint_R \left\{ \frac{1}{2} (\Delta w_{MN})^2 - f(x,y)\, w_{MN} \right\} dx\, dy.$$

Diese Funktion zweiten Grades der a_{mn} haben wir zu einem Minimum zu machen. Es ist also

$$0 = \frac{\partial J_{MN}}{\partial a_{\mu\nu}} = \iint \left\{ \Delta w_{MN}\, \Delta(\xi_\mu \eta_\nu) - f \xi_\mu \eta_\nu \right\} dx\, dy, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots M;\ \nu = 1, 2, \ldots N)$$

oder

$$(41.) \qquad 0 = \iint \left\{ \Delta\Delta w_{MN} - f \right\} \xi_\mu \eta_\nu\, dx\, dy.$$

Es ist

$$\Delta\Delta w_{MN} = \sum_1^M \sum_1^N a_{mn} \left[\left(\frac{K_m^4}{a^4} + \frac{K_n^4}{b^4} \right) \xi_m \eta_n + 2 \xi_m'' \eta_n'' \right].$$

Sei

$$\sigma_{mn} = a \int_0^a \xi_m \xi_n''\, dx,$$

so gilt, wenn man die Gleichung

$$\frac{d^4 \xi_m}{dx^4} = \frac{K_m^4}{a^4} \xi_m$$

berücksichtigt, und partiell integriert, für $m \neq n$

$$\sigma_{mn} = \sigma_{nm} = \frac{a^5}{K_m^4 - K_n^4} \left[\xi_m''' \xi_n'' - \xi_m'' \xi_n''' \right]_0^a.$$

Sei

$$(42.) \qquad \alpha_m = \frac{\cos K_m - \mathfrak{Cof}\, K_m}{\sin K_m - \mathfrak{Sin}\, K_m},$$

$$(\alpha_1 = 0{,}98250;\ \alpha_2 = 1{,}00078;\ \alpha_3 = 0{,}99997;\ \alpha_4 = 1{,}00000, \ldots)$$

so wird

$$(43.) \qquad \sigma_{nm} = \sigma_{mn} = \frac{4 K_m^2 K_n^2}{K_m^4 - K_n^4} \left[(-1)^{m+n} + 1 \right] \left[K_m \alpha_m - K_n \alpha_n \right].$$

Für $m > 2$ und $n > 2$ ist auf $\frac{1}{10000}$ genau

$$\sigma_{mn} = \frac{4\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2(m-n)((-1)^{m+n}+1)}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^4-\left(n+\frac{1}{2}\right)^4}.$$

Endlich ist

$$(44.)\quad \sigma_{mm} = a\int_0^a \xi_m''\,\xi_m\,dx = -\alpha_m^2 K_m^2 + 2K_m\alpha_m, \qquad (\sigma_{11}=12{,}302;\ \sigma_{22}=46{,}052;\ \sigma_{33}=98{,}904)$$

und für größere m

$$\sigma_{mm} = -\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2 + (2m+1)\pi.$$

Es ist offenbar σ_{mn} nur dann von Null verschieden, wenn m, n beide ungerade oder beide gerade sind. Die Gleichungen (41.) lassen sich somit schreiben

$$(45.)\quad \frac{2}{ab}\sum_1^{M}{}'\sum_1^{N}{}' a_{mn}\sigma_{m\mu}\sigma_{n\nu} + ab\,a_{\mu\nu}\left[\frac{K_\mu^4}{a^4}+\frac{K_\nu^4}{b^4}+\frac{2\sigma_{\mu\mu}\sigma_{\nu\nu}}{a^2b^2}\right] = f_{\mu\nu},$$
$$(\mu=1,2,\ldots M;\ \nu=1,2,\ldots N)$$

$$f_{\mu\nu} = \int_0^b\int_0^a f\,\xi_\mu(x)\,\eta_\nu(y)\,dx\,dy.$$

Der Index $'$ an den Σ zeigt an, daß man die Glieder in $a_{\mu\nu}$ aus der Summe wegzulassen hat.

Durch Auflösung dieses Gleichungssystems für wachsende Werte von M, N erhält man immer bessere Annäherungen $w_{M,N}$, $w_{M+1,N}$, ... an die gesuchte Funktion w. Der Koeffizient irgendeines bestimmten Gliedes, $\xi_p\eta_q$ z. B., wird dabei nach einander die Werte $a_{pq}, a'_{pq}, a''_{pq}, \ldots a^{(s)}_{pq}$ erhalten, und es läßt sich zeigen, daß mit wachsendem s diese Größen gegen den Koeffizienten A_{pq} in der Entwicklung der Funktion w

$$(46.)\quad w = \sum_1^\infty\sum_1^\infty A_{mn}\xi_m\eta_n$$

konvergieren; letztere Reihe aber ist, nach den allgemeinen Sätzen über w,

und nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen, absolut und gleichmäßig konvergent nebst ihren gliedweise genommenen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung wenigstens. Sei nun

$$\sum_1^M \sum_1^N (a_{mn} - A_{mn})\, \xi_m \eta_n = \alpha_{MN}(x, y),$$

so bleibt, welches auch x und y sei, α_{MN} kleiner als eine beliebig vorgegebene Größe ε, sobald M, N genügend groß gewählt sind, da ja $\lim w_{MN} = w$. Es ist dabei

$$a_{mn} - A_{mn} = \frac{1}{ab} \iint_R \alpha_{MN}\, \xi_m\, \eta_n\, dx\, dy.$$

Da aber ξ_m, η_n nach (35.) kleiner als bestimmte, mit 1 vergleichbare Zahlen bleiben, so folgt

$$|a_{mn} - A_{mn}| < \varepsilon A,$$

wo A eine feste Zahl ist, die von M, N unabhängig ist. Damit ist die Konvergenz der $a^{(s)}_{mn}$ gegen A_{mn} bei wachsenden M, N erwiesen.

Es ist aber wichtig, auf den wesentlichen Unterschied aufmerksam zu machen, der zwischen unsern sukzessiven Approximationen w_{MN} und einer Entwicklung wie (46.) besteht. Es ist derselbe wie zwischen einer nach Polynomen fortschreitenden Reihe und einer Potenzreihe: die Art der Konvergenz und ihre Bedingungen sind wesentlich verschieden. In analoger Weise ist bekannt, daß die *Fourier*-Reihen im allgemeinen nicht gliedweise differentiiert werden dürfen. Bildet man aber aus ihnen sukzessive Approximationen $S_1, S_2, \ldots$, indem man das Mittel S_n der Summen der n ersten Glieder berechnet, so entsteht eine Reihe trigonometrischer *Summen*, die den w_{MN} analog sind, und es ist von Herrn *Féjèr**) gezeigt worden, daß dieselben gegen die gleiche Grenze konvergieren, aber eine gliedweise Differentiation gestatten. Es ist dies ein Umstand, der für die praktische Brauchbarkeit unserer Reihen von Wichtigkeit sein kann, insbesondere wenn nach *Fourier*-Reihen entwickelt wird. Die Bedingungen des § 7 insbesondere sind daher als hinreichend, nicht aber als notwendig anzusehen.

---

*) *Féjèr*, C. R. 1901, 1902, passim; Referat in Fortschr. der Math. (33) S. 276, 1902.

Setzt man den Ursprung des Koordinatensystems in den Mittelpunkt des Rechtecks, die Achsen parallel zu den Seiten, so erkennt man leicht, daß ξ_m eine gerade Funktion von x wird, wenn m ungerade; eine ungerade, wenn m gerade. Ebenso für $\eta_n(y)$. Wenn also $f(x,y)$ in x oder y gerade oder ungerade ist, so kommen natürlich in w_M nur die entsprechenden ξ oder η vor; die übrigen a_{mn} sind gleich Null.

§ 12.

Wir führen die numerische Rechnung durch für den Fall einer viereckigen Platte, deren Seiten gleich a sind und auf welche ein gleichförmiger Druck wirkt. Es ist dann

$$f = \text{konst} = c,$$

$$f_{\nu\mu} = f_{\mu\nu} = \frac{16\,c\,a^2\,\alpha_\mu\,\alpha_\nu}{K_\mu\,K_\nu}$$

für ungerade μ, ν; für gerade μ, ν ist $f_{\mu\nu} = 0$.

Es ist also auch $a_{mn} = a_{nm}$, wir können die Gleichungen (45.) dadurch vereinfachen, daß wir dies berücksichtigen, $\mu \leqq \nu$ setzen und die übrigen Gleichungen ($\mu > \nu$) weglassen. Da f gerade ist, hat man nur ungerade m, n zu berücksichtigen. Wir setzen abkürzend $l = 8ca^4\,10^{-4}$.

Sei zunächst $M = N = 1$, so ergibt sich aus (45.), welches sich auf *eine* Gleichung mit der Unbekannten a_{11} reduziert,

$$\frac{1}{l}\,w_1(x,y) = 0{,}6620\,\xi_1(x)\,\eta_1(y). \tag{47.}$$

Ist ferner $M = N = 2$, so hat man das System zu lösen

$$\begin{aligned} l\,431{,}5 &= 651{,}8\,a_{11} - 239{,}2\,a_{13} + 94{,}7\,a_{33}, \\ l\,188{,}5 &= -\,119{,}6\,a_{11} + 8867\,a_{13} - 961\,a_{33}, \\ l\,82{,}7 &= 94{,}6\,a_{11} - 1922\,a_{13} + 24390\,a_{33}. \end{aligned}$$

Statt dieses System durch Determinanten zu lösen, berücksichtigen wir den wichtigen Umstand, daß die Koeffizienten der Diagonalglieder bedeutend größer sind als die der andern, und daß wir in erster Approxi-

mation schon $a_{11} = 0{,}6620\,l$ gefunden haben. Wir setzen daher zunächst

$$a_{11} = 0{,}6620 l$$

und *berechnen die neu hinzugekommenen Größen* a_{13}, a_{33} *unter alleiniger Berücksichtigung der Diagonalglieder* auf den rechten Seiten der zwei letzten Gleichungen*). Es ergeben sich die Werte

$$a_{13} = 0{,}0302\,l;\ a_{33} = 0{,}0008\,l.$$

Die so gewonnenen Zahlen betrachten wir als erste Annäherungen, setzen also

$$a_{11} = 0{,}6620\,l + x l;\ a_{13} = 0{,}0302\,l + y l;\ a_{33} = 0{,}0008\,l + z l,$$

schaffen die bekannten Größen auf die linke Seite der Gleichungen und berechnen wieder die Korrektionen x, y, z unter alleiniger Berücksichtigung der Diagonalglieder. Es ist

$$x = 0{,}0110;\ y = 0{,}0001;\ z = 0{,}0023$$

und endlich, durch erneute Wiederholung des Verfahrens ergeben sich

$$x' = -0{,}0003;\ y' = +0{,}0004;\ z' = 0{,}0000,$$

also

$$a_{11} = 0{,}6727\,l;\ a_{13} = 0{,}0307\,l;\ a_{33} = 0{,}0031\,l,$$

$$(48.)\quad \frac{1}{l} w_2 = 0{,}6727\,\xi_1\eta_1 + 0{,}0307\,(\xi_1\eta_3 + \xi_3\eta_1) + 0{,}0031\,\xi_3\eta_3.$$

Der Vorzug dieser Lösungsmethode besteht darin, daß stets nur mit sehr kleinen Zahlen operiert wird, so daß, außer für die Berechnung von w_1, der Rechenschieber angewandt werden kann und außerdem nur wesentlich ein-

*) Wobei in den Gliedern in a_{11} diese Größe durch ihren Näherungswert ersetzt und die Glieder auf die linke Seite gebracht werden.

fachere Operationen durchzuführen sind. Eine direkte Lösung durch Determinanten würde 5stellige Logarithmentafeln erfordern.

Bei höheren Approximationen ist dieser Umstand noch sehr viel fühlbarer; eine direckte Lösung wäre hier ungleich zeitraubender. Sei $M=N=3$, so hat man 6 Gleichungen:

$$\begin{aligned}
l\cdot 431{,}5 &= 651{,}8\,a_{11}-239{,}2\,a_{13}+94{,}7\,a_{33}-188\,a_{15}+148\,a_{35}+58\,a_{55}\\
l\cdot 188{,}5 &= -119{,}6\,a_{11}+8867\,a_{13}-961\,a_{33}-226\,a_{15}-515\,a_{35}+186\,a_{55}\\
l\cdot 82{,}7 &= 94{,}6\,a_{11}-1922\,a_{13}+24390\,a_{33}+474\,a_{15}-4820\,a_{35}+592\,a_{55}\\
l\cdot 120{,}0 &= -93{,}8\,a_{11}-226\,a_{13}+237\,a_{33}+48100\,a_{15}-2370\,a_{35}-2015\,a_{55}\\
l\cdot 52{,}5 &= 74{,}3\,a_{11}-515\,a_{13}-2410\,a_{33}-2370\,a_{15}+78600\,a_{35}-6420\,a_{55}\\
l\cdot 33{,}5 &= 58\,a_{11}+372\,a_{13}+592\,a_{33}-4030\,a_{15}-12840\,a_{35}+158500\,a_{55}.
\end{aligned}$$

Wir betrachten wieder die oben für $M=2$ gewonnenen Werte von a_{11}, a_{13}, a_{33} als erste Approximationen, und berechnen aus den Diagonalgliedern der drei letzten Gleichungen die Näherungswerte

$$a_{15}=0{,}0039;\quad a_{35}=0{,}0003;\quad a_{55}=-0{,}0001.$$

Die erste Korrektion schon gibt die richtigen Werte, und damit

$$\begin{aligned}
(49.)\quad \frac{1}{l}w_3(x,y) &= 0{,}6740\,\xi_1\eta_1+0{,}0308\,(\xi_1\eta_3+\xi_3\eta_1)+0{,}0032\,\xi_3\eta_3\\
&\quad +0{,}0040\,(\xi_1\eta_5+\xi_5\eta_1)+0{,}0004\,(\xi_3\eta_5+\xi_5\eta_3)+0{,}0000\,\xi_5\eta_5.
\end{aligned}$$

Die Konvergenz der w_i ist also eine durchaus befriedigende, wie aus dem Vergleich von (47.), (48.), (49.) *hervorgeht.*

Offenbar ist die Geschwindigkeit, mit welcher die $f_{\mu\nu}$ mit wachsenden μ,ν abnehmen, für die Konvergenz des Verfahrens im großen ganzen maßgebend. Da die $f_{\mu\nu}$ im wesentlichen die Koeffizienten der Entwicklung von $f(x,y)$ nach den $\xi_m\eta_n$ sind, so läßt sich ohne Schwierigkeit zeigen, daß für große μ,ν in unserm Falle ($f=$konst) der Ausdruck $\mu\nu f_{\mu\nu}$ mit wachsenden μ,ν endlich bleibt. Ist aber $f=0$ am Rande, so bleibt auch $\mu^2\nu^2 f_{\mu\nu}$ endlich, und wenn auch noch $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ am Rande verschwinden, so

ist nach § 10 sogar $\mu^4 \nu^4 f_{\mu\nu}$ endlich: wirkt der Druck vorzugsweise auf die Mitte der Platte, so wird eine wesentlich raschere Konvergenz die Folge sein. Das gewählte Beispiel stellt also keinen besonders günstigen Fall dar. Unstetigkeiten von f dagegen sind für die numerische Rechnung weniger günstig.

Der Umstand, daß die Koeffizienten der Diagonalglieder erheblich größer sind als die der andern Glieder der Gleichungen (45.), liegt daran, daß die benutzten $\psi_{mn} = \xi_m \eta_n$, denen ja die sogenannte *Orthogonalitätseigenschaft* zukommt

$$\iint_R \psi_{mn} \psi_{m'n'} dx\, dy = 0, \text{ wenn nicht } m = m',\ n = n' \text{ ist,}$$

diese Eigenschaft auch noch *angenähert* besitzen, wenn man mit ihnen die unter dem Integralzeichen in J vorkommende Operation Δ vornimmt. Sind die transversalen Eigenschwingungen $\varphi_i(x, y)$ einer am Rande festgeklemmten Platte von der betrachteten Gestalt bekannt (was beim Rechteck und Viereck nicht der Fall ist), und setzt man $\varphi_i = \psi_i$, so gilt

$$\Delta\Delta\, \varphi_i = \lambda_i \varphi_i;$$

$$\iint_R \Delta\psi_m \Delta\psi_n dx\, dy = \iint \Delta\Delta\psi_m \cdot \psi_n dx\, dy = \lambda_m \iint \psi_m \psi_n\, dx\, dy = 0 \text{ für } m \neq n,$$

so daß die Koeffizienten α_{pq} der allgemeinen Gleichungen nach (9.) verschwinden, sobald $p \neq q$ ist. Die linken Seiten des Gleichungssystems (11.), welches die a_i bestimmt, reduzieren sich dann streng auf ihre Diagonalglieder, und *man erhält somit als Spezialfall unserer Methode die bekannten Entwicklungen nach Eigenschwingungen,* welche als Verallgemeinerungen der *Fourier*-Reihen zu betrachten sind.

Man wird eine solche angenäherte Orthogonalitätseigenschaft in manchen Fällen durch geeignete Wahl der ψ_i besonders für größere i unschwer herstellen können, wobei dann nach dem angegebenen Rechnungsschema zu verfahren ist, und die Genauigkeit leicht sehr weit getrieben werden kann.

Die Potentialgleichung. — Das Dirichletsche Prinzip.

§ 13.

Wir gehen dazu über, die Anwendbarkeit der neuen Methode auf das bekannte *Dirichlet*sche Problem zu prüfen: gesucht wird eine Funktion $u(x,y)$, welche nebst ihren Ableitungen erster Ordnung innerhalb eines bestimmten Gebiets R endlich und stetig ist, in R der Gleichung

$$\Delta u = 0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{50.}$$

genügt, und auf dem Rande L von R gegebene Werte annimmt.

Die für die physikalischen Anwendungen durchaus unwesentlichen Einschränkungen, denen wir die Gestalt von R und die Randwerte unterwerfen, sind:

1°. Wie in § 6 soll die Gleichung der Randkurve auf die Form

$$F(x,y)=0$$

gebracht werden können, wobei F im Innern nicht verschwindet und nebst seinen Hauptableitungen in R und auf L endlich und stetig ist. Unter *Hauptableitungen* verstehen wir jetzt die Ableitungen

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \quad \text{für} \quad m=0,1,2; n=0,1,2.$$

Es soll auf dem Rande nicht identisch $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ sein.

Die Randwerte denken wir uns durch die Werte, die eine Funktion $Q(x,y)$ auf L annimmt, gegeben, und setzen voraus, daß Q nebst seinen Ableitungen erster Ordnung in R endlich und stetig bleibe, und daß ΔQ endlich sei. Ist diesen Bedingungen genügt, so ergibt sich die Lösung des Problems in ganz ähnlicher Weise wie im zuerst behandelten Beispiel der Platte.

Sei

$$u - Q = w, \quad \text{so folgt} \quad \Delta w + \Delta Q = 0.$$

Die Funktion w ist im Innern nebst ihren Ableitungen erster Ordnung endlich und stetig; sie verschwindet auf L und genügt im Bereich R der Gleichung

$$\Delta w = f(x,y), \tag{51.}$$

wo $f = -\Delta Q$ eine gegebene, endliche Funktion bedeutet.

Das *Dirichlet*sche Integral

$$J = \iint_R \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dS,$$

dessen Minimumswert unter den besprochenen Bedingungen der gesuchten Funktion u entspricht, wird nun

$$J = \iint \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x} + 2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 \right\} dS.$$

Durch partielle Integration erhalten die Doppelprodukte die Form $-2w\Delta Q$ oder $-2wf$; das Integral der in Q quadratischen Glieder ist eine gegebene, belanglose Konstante; man erhält also

$$J = \iint_R \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - 2wf(x,y) \right\} dS + \text{konst} \tag{52.}$$

und zugleich den Satz, daß dieses Integral eine untere Grenze besitzt.

Wir bilden nun, etwa nach den Vorschriften der §§ 7 und 8, eine unendliche Reihe von Funktionen $\psi_i(x,y)$, welche genau denselben Bedingungen genügen, wie sie in § 2 für das erste Problem gestellt wurden, wobei nur die Bedingung $\frac{\partial \psi_i}{\partial n} = 0$ wegfällt, und auf die neue Definition der „Hauptableitungen“ zu achten ist. Dann bilden wir wieder

$$w_m(x,y) = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \cdots + a_m\psi_m,$$

und fordern, daß die quadratische Funktion der a_i

$$J_m(a_1, a_2, \dots a_m) = \iint_R \left\{ \left(\frac{\partial w_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_m}{\partial y}\right)^2 - 2 w_m f \right\} dS$$

ein Minimum werde, so daß für die a_i die linearen Gleichungen resultieren

$$(53.) \qquad \frac{\partial J_m}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial J_m}{\partial a_2} = 0, \dots \frac{\partial J_m}{\partial a_m} = 0,$$

welche aus denselben Gründen wie die entsprechenden Gleichungen (11.) stets in eindeutiger Weise lösbar sind. Diese Gleichungen lassen sich, unter Einführung der willkürlichen Konstanten $A_1, A_2, \dots A_m$ und der Funktion

$$(54.) \qquad \zeta_m = A_1 \psi_1 + A_2 \psi_2 + \cdots + A_m \psi_m$$

wiederum, wie in (12.) und (13.), zusammenfassen in die eine, für beliebige A_i gültige Gleichung

$$0 = \iint_R \left\{ \frac{\partial w_m}{\partial x} \frac{\partial \zeta_m}{\partial x} + \frac{\partial w_m}{\partial y} \frac{\partial \zeta_m}{\partial y} - f \zeta_m \right\} dS$$

oder

$$(55.) \qquad 0 = \iint \{ w_m \Delta \zeta_m + f \zeta_m \} \, dS.$$

Die Minima $J_1^{(0)}$, $J_2^{(0)}$, ... bilden wieder eine stets abnehmende, oder doch nie zunehmende *Reihe von Zahlen, die gegen eine untere Grenze* $J^{(0)}$ *konvergieren*, und wie auf Seite 13, Gleichung (16.) und (17.), läßt sich unter geeigneter Spezialisierung von (55.), (diese Gleichung für m und für $m+n$ geschrieben) die Differenz $J_{m+n}^{(0)} - J_m^{(0)}$ auf die Form bringen

$$(56.) \quad J_{m+n}^{(0)} - J_m^{(0)} = - \iint_R \left\{ \left[\frac{\partial (w_{m+n} - w_m)}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial (w_{m+n} - w_m)}{\partial y} \right]^2 \right\} dS.$$

Aus der Konvergenz der $J_m^{(0)}$ folgt, daß dieses Integral für $m > M$ bei beliebigem n kleiner als eine gegebene Größe η gemacht werden kann, wenn nur M geeignet gewählt wird. Aber aus

$$\iint_R \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 dS < 1$$

folgt, wenn man die Gebiete D, D' sondert, wo $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| \leqq 1$, und diejenigen, wo $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| > 1$ ist,

$$\iint \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| dS < \iint_D dS + \iint_{D'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 dS < S + 1,$$

wo S die Oberfläche von R ist. Da $\frac{\partial |\varphi|}{\partial x} \leqq \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|$, so folgt für jedes Teilgebiet von R

$$\iint \frac{\partial |\varphi|}{\partial x} dS < 1 + S;$$

und die Anwendung auf (56.) ergibt

$$\left|\iint \frac{\partial |w_{m+n} - w_m|}{\partial x} dS\right| < (S+1)\sqrt{\eta}; \quad \left|\iint \frac{\partial |w_{m+n} - w_m|}{\partial y} dS\right| < (S+1)\sqrt{\eta}.$$

Daraus läßt sich zwar nicht die Konvergenz von w_m selbst, aber doch die Konvergenz der einfachen Integrale

$$\int w_m \, dy; \quad \int w_m \, dx$$

genommen längs Parallelen zu den Achsen, wobei der Integrationsweg im Innern liegt, erschließen. Und zwar ist diese Konvergenz eine *gleichmäßige*. Denn setzen wir außerhalb R die zunächst nur im Innern von R definierten Funktionen ψ_i, w_m gleich Null, wobei, da sie am Rande verschwinden, ihre Stetigkeit gewahrt wird, und legen wir die Koordinatenachsen außerhalb R, so können wir die eben gefundenen Ungleichungen auf das Rechteck $x=0$, $x=x$; $y=0$, $y=y$ anwenden, wo (xy) innerhalb R liegt; da aber

$$\int_0^y \int_0^x \frac{\partial |w_{m+n} - w_m|}{\partial x} dx \, dy = \int_0^y \Big[|w_{m+n}(x,y) - w_m(x,y)| \Big]_{x=0}^{x=x} dy$$

und $w_i(0, y) \equiv 0$ ist, so folgt

$$\int_0^y |w_{m+n} - w_m|\, dy < (S+1)\sqrt{\eta},$$

mithin

$$\left| \int_0^y w_{m+n}\, dy - \int_0^y w_m\, dy \right| < (S+1)\sqrt{\eta}.$$

Die Integrale

$$\int_0^y w_m\, dy; \qquad \int_0^y w_m\, dx$$

konvergieren also innerhalb R und auf L gleichmäßig gegen stetige Grenzfunktionen.

Bildet man ein Bereich aus einem kleinen Kurvenstück l, welches innerhalb R oder auf L liegt, und Parallelen zu den Achsen, so ergibt die Anwendung der Ungleichungen auf dies Bereich

$$\int_l |w_{m+n} - w_m| \cos(nx)\, ds - \int |w_{m+n} - w_m|\, dy < (S+1)\sqrt{\eta}.$$

Es ist n die Normale zu l; die ja willkürlichen Richtungen der Achsen und die Länge von l seien so gewählt, daß cos nx positiv bleibt. Mithin

$$\left| \int_l w_{m+n} \cos nx\, ds - \int_l w_m \cos nx\, ds \right| < 2\,(S+1)\sqrt{\eta},$$

d. h. es konvergieren auch die Integrale

$$\int_l w_m \cos(nx)\, ds; \qquad \int_l w_m \cos(ny)\, ds$$

oder, wie man leicht einsieht

$$\int_l w_m\, ds.$$

§ 14.

Der Beweis der Existenz der gesuchten Funktion w gestaltet sich ganz wie früher.

Man setze

$$U_m = \int_0^x \int_0^x \int_0^y \int_0^y w_m \, dx^2 \, dy^2; \quad F(x,y) = \int_0^x \int_0^x \int_0^y \int_0^y f \, dx^2 \, dy^2; \quad \lim_{m=\infty} U_m = U,$$

wobei wieder die Achsen außerhalb R liegen, und $w_m = 0$, $f = 0$ außerhalb R zu setzen ist. Die Gleichung (55.) läßt sich durch partielle Integration auf die Form bringen

$$0 = \iint_R (\Delta U_m + F) \frac{\partial^4 \zeta_m}{\partial x^2 \, \partial y^2} \, dx \, dy + \int_L \Psi \, ds,$$

wo Ψ sowohl wie ΔU_m nur solche Ableitungen von U_m enthalten, von welchen wir wissen, daß sie für $m = \infty$ konvergieren. Ferner kommen darin noch die Hauptableitungen von ζ_m vor. Nach den gemachten Voraussetzungen können wir also, ganz wie in § 4, zur Grenze $m = \infty$ übergehen und das *Hilbert*sche Lemma anwenden. Dann ist für jedes Rechteck $\varrho(\alpha \ldots \alpha'; \beta \ldots \beta')$ im Innern von R:

$$\Delta U - f(x,y) = X_1(x) + y \, X_2(x) + Y_1(y) + x \, Y_2(y),$$

wo X_1, X_2 endliche stetige Funktionen von x allein, Y_1, Y_2 ebensolche Funktionen von y allein bedeuten.

Sei

$$V = U - \int_\beta^y \int_\beta^y (Y_1 + Y_2 x) \, dy^2 - \int_\alpha^x \int_\alpha^x (X_1 + X_2 y) \, dx^2,$$

so folgt

$$\Delta V = F(x,y).$$

Es ist also V ein nebst seinen Ableitungen erster und zweiter Ordnung endliches und stetiges Integral dieser Gleichung. Daraus folgt aber, wie in § 5, unter Anwendung der bekannten *Green*schen Sätze über das logarithmische Potential, daß

$$V(\xi,\eta) = \frac{-1}{2\pi} \iint_\varrho \log r \cdot F \, dx \, dy + \text{analytische Funktion von } \xi, \eta,$$

wobei die analytische Funktion (ein Randintegral) der Gleichung $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}=0$ genügt. Es ist

$$\frac{\partial^4 V}{\partial \xi^2\,\partial \eta^2}=-\frac{1}{2\pi}\iint_{\varrho}\log r\cdot f\,dx\,dy+\text{analytische Funktion},$$

und diese Funktion, die wir w nennen wollen, bleibt somit nebst ihren Ableitungen erster Ordnung innerhalb ϱ endlich und stetig, und genügt der Differentialgleichung

$$\Delta w=f(x,y).$$

Hierbei ist

$$w(x,y)=\lim_{\varepsilon=0}\lim_{m=\infty}\int_{x}^{x+\varepsilon}w_m(x,y)\,dx=\lim_{\varepsilon=0}\lim_{m=\infty}\int_{y}^{y+\varepsilon}w_m(x,y)\,dy.$$

Da diese Eigenschaften für jedes ϱ gelten, gelten sie im ganzen Innern von R.

Es ist noch zu zeigen, daß w auch die Randbedingung $w=0$ erfüllt. Wir wissen, daß

$$\lim_{m=\infty}\int_{l}w_m\cos(nx)\,ds$$

für jedes kleine Kurvenstück l in R existiert, wobei, wenn man die Lage dieses starr gedachten Stückes innerhalb R ändert, die Konvergenz eine gleichmäßige bleibt — auch wenn l sich beliebig dem Rande L nähert und schließlich mit ihm koinzidiert. Daraus folgt, daß für jede innere Lage von l

$$\lim_{m=\infty}\int_{l}w_m\cos(nx)\,ds=\int_{l}w\cos(nx)\,ds.$$

Nähert sich l an L und fällt mit einem Teil des Randes L zusammen, so konvergiert die linke Seite gegen Null, da auf L alle $w_m=0$ sind; die Werte, die w annimmt, wenn l sich L unbegrenzt nähert, genügen also auch, wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz, der Bedingung

$$\int_{l}w\cos(nx)\,ds=0,$$

und zwar für jedes beliebige Stück der Randkurve, woraus $w=0$ folgt.

Die Funktion w ist also die gesuchte Lösung.

Allerdings ist damit nur ein Existenzbeweis, nicht eine wirkliche Berechnung von w erreicht. Aber es ist schon früher bemerkt worden, daß man in den praktisch vorkommenden Fällen tatsächlich kaum mit der Möglichkeit zu rechnen haben dürfte, daß ein Integral wie (56.) gegen Null konvergiert, ohne daß der Integrand auch konvergierte. Dann aber existiert nicht nur $\lim_{m=\infty} w_m = w$, sondern auch noch $\lim \frac{\partial w_m}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}$, $\lim \frac{\partial w_m}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y}$; die erhaltenen Approximationen dürfen sogar gliedweise differentiiert werden. Ob daher die Methode brauchbar oder nicht, entscheidet im einzelnen Falle die numerische Berechnung der Approximationen.

Man erkennt an diesem Beispiel der Potentialgleichung, daß unsere Methode, wie schon betont, ausschließlich eine spezielle bestimmte Fassung des *Dirichlet*schen Minimumprinzips ist, und daß diese Spezialisierung eben den Vorteil eines Konvergenzbeweises und damit eines Beweises des *Dirichlet*schen *Prinzips* mit sich bringt.

Auch das analoge Problem für drei Dimensionen ist unserer Methode zugänglich. Ferner läßt sich die Aufgabe, bei gegebenen Randwerten von w und $\frac{\partial w}{\partial n}$ eine Lösung von $\Delta\Delta w = 0$ im Innern eines gegebenen Gebiets zu finden, in analoger Weise auf das Problem der Gleichung $\Delta\Delta w = f(x, y)$, $w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ zurückführen, welches wir oben gelöst haben.

Lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten.

§ 15.

Die Anwendung der Methode ist natürlich keineswegs an so einfache Voraussetzungen über das Integral J, welches ein Minimum werden soll, wie wir sie bisher betrachtet haben, gebunden. Aber auch der Konvergenzbeweis läßt sich unschwer verallgemeinern, und es soll dies am Beispiele *linearer homogener Differentialgleichungen mit einer Variablen und Koeffizienten, die gegebene Funktionen von x sind*, gezeigt werden. Die Erfüllung der Grenzbedingungen und die Auffindung der Funktionen ψ_i vereinfacht sich sehr im Falle einer einzigen Variablen. Zu größerer Übersichtlichkeit beschränke ich mich auf Gleichungen zweiter Ordnung; doch gelten die Sätze ohne wesentliche Änderungen auch für höhere Ordnungen.

Das Integral J läßt sich dann in der Form schreiben

$$(57.) \qquad J=\int_a^b \{f_1(x)y'^2+2f_2(x)yy'+f_3(x)y^2\}\,dx.$$

Und wir fordern, es solle eine Funktion $y(x)$ gefunden werden, *welche im Intervall ab nebst ihrer Ableitung y' endlich und stetig bleibe, für $x=a$; $x=b$ die gegebenen Werte A, B annehme und J zu einem Minimum mache.* Es ist dies die *Dirichlet*sche Randwertaufgabe, auf einfache Differentialgleichungen übertragen.

Wir setzen voraus, es seien f_1, f_2, f_3 im Gebiet ab stetige, endliche Funktionen von x; gleiches gelte von $f_1'=\frac{df_1}{dx}$ und von f_2'. Endlich fordern wir, daß die quadratische Form

$$f_1y'^2+2f_2yy'+f_3y^2$$

im ganzen Gebiet ab *definit* sei, resp., da es auf das Vorzeichen nicht ankommt, *positiv*.

Dann existieren zwei positive Größen k, K derart, daß für $a\leqq x\leqq b$

$$K>f_1>k;\ K>f_3>k;\ f_1f_3-f_2^2>k.$$

Sei

$$(58.) \qquad y(x)=\frac{x-a}{b-a}B+\frac{x-b}{a-b}A+u(x),$$

so wird $u(a)=u(b)=0$ sein, und vermittelst einer partiellen Integration erhält man

$$J=\int_a^b \{f_1u'^2+2f_2uu'+f_3u^2+2Fu\}\,dx+\text{konst},$$

wo

$$F(x)=(f_3-f_2')\left[\frac{x-a}{b-a}B+\frac{x-b}{a-b}A\right]-f_1'\frac{B-A}{b-a}$$

und die additive, übrigens belanglose Konstante nur von den gegebenen Größen $A, f_1, \ldots$ abhängt.

Jede Funktion u, die den vorausgesetzten Stetigkeits- und Randbedingungen genügt, läßt sich im ganzen Intervall ab durch die

*Fourier*sche Reihe

$$(59.) \qquad u(x) = \sum_1^\infty a_i \sin \frac{i\pi(x-a)}{b-a}$$

darstellen; die Bedingungen $u(a) = u(b) = 0$ sind hierbei erfüllt, und es kann $u(x)$ einmal gliedweise differentiiert werden, und falls u'' den *Dirichlet*schen Bedingungen genügt, sogar zweimal. Denn setzt man die Funktion u' für $x < a$ als gerade Funktion fort, so gilt

$$u'(x) = \Sigma A_i \cos \frac{i\pi(x-a)}{b-a}$$

im Intervall $a-b < x < b$, und die gliedweise Integration dieser gleichmäßig konvergenten Reihe führt auf die Reihe (59.), plus einer additiven Konstante, die wegen der Grenzbedingungen sich zu Null ergibt.

Ähnlich findet sich, falls u'' entwickelbar ist, durch zweimalige Integration die Reihe (59.), plus einer linearen Funktion von x, die wieder wegen $u(a) = u(b) = 0$ verschwindet.

Wir können also $\psi_m = \sin \frac{m\pi(x-a)}{b-a}$ setzen, und führen die Funktion

$$u_m = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \cdots + a_m\psi_m$$

an Stelle von u in das Integral J ein. Dieses wird wieder eine quadratische Funktion $J_m(a_1, \ldots a_m)$ der a_i und wir bestimmen letztere so, daß J_m ein Minimum wird, d. h. wir lösen das System linearer Gleichungen

$$\frac{\partial J_m}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial J_m}{\partial a_2} = 0; \ldots \frac{\partial J_m}{\partial a_m} = 0.$$

Da der quadratische Teil von J_m nach den gemachten Voraussetzungen nur dann verschwindet, wenn u_m identisch gleich Null, und somit $a_1 = a_2 = \cdots a_m = 0$, so ist auch in diesem Falle die Lösung eindeutig bestimmt. Da J nach seinem Ausdruck (57.) nicht negativ sein kann, so folgt wieder die Konvergenz der sukzessiven Minima $J_1^{(0)}, J_2^{(0)}, J_3^{(0)} \ldots$ gegen eine Grenze. Man setze wiederum

$$(60.) \qquad \zeta_m = \sum_1^m A_i \sin \frac{i\pi(x-a)}{b-a},$$

so fordert die Gleichung $J_m = \min$, daß für beliebige A_i sei

$$(61.) \qquad 0 = \int_a^b dx \,\{(f_1 u'_m + f_2 u_m)\zeta'_m + (f_2 u'_m + f_3 u_m)\zeta_m + F\zeta_m\}$$

und die Differenz $J^{(0)}_{m+n} - J^{(0)}_m$ läßt sich, durch geeignete Spezialisierung dieser Gleichung (wie in § 2), auf die Form bringen

$$J^{(0)}_{m+n} - J^{(0)}_m = -\int_a^b \Big\{f_1[u'_{m+n} - u'_m]^2 + 2f_2[u'_{m+n} - u'_m][u_{m+n} - u_m] + f_3[u_{m+n} - u_m]^2\Big\}\, dx.$$

Wieder kann das Integral für genügend große m kleiner als die gegebene Größe η gemacht werden. Da aber der Integrand positiv und größer*) als $(u'_{m+n} - u'_m)^2 \frac{f_1 f_3 - f_2^2}{f_3}$, somit auch als $(u'_{m+n} - u'_m)^2 \frac{k}{K}$ ist, gilt die Ungleichung

$$\int_a^b (u'_{m+n} - u'_m)^2\, dx < \frac{\eta K}{k},$$

woraus wir wie in § 13 schließen

$$\left| \int_a^x \frac{d\,|u_{m+n} - u_m|}{dx}\, dx \right| < (1 + b - a)\sqrt{\frac{\eta K}{k}}.$$

Daraus folgt, *daß u_m im ganzen Gebiet $a\,b$ gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion u konvergiert*, wenn m unbegrenzt zunimmt.

Um die Existenz der Ableitungen von u zu beweisen, setzen wir

$$P_m = \int_a^x \int_a^x [F + u_m f_3 - u_m f'_2]\, dx^2 + \int_a^x f'_1 u_m\, dx$$

und es konvergieren für $m = \infty$, P_m und P'_m gegen Grenzfunktionen P und P'.

---

*) Es ist

$$f_1 \varphi'^2 + 2f_2 \varphi\varphi' + f_3 \varphi^2 \equiv \frac{1}{f_3}[f_3\varphi + f_2\varphi']^2 + \varphi'^2 \frac{f_1 f_3 - f_2^2}{f_3}$$

Dann wird (61.)

$$0 = \int_a^b (u_m f_1 - P_m) \frac{d^2 \zeta_m}{dx^2} dx + \zeta'_m(b) P_m(b).$$

Wie wir gesehen haben, lassen sich die Koeffizienten A_i von ζ_m so bestimmen, daß $\lim \zeta_m = \zeta$, $\lim \frac{d\zeta_m}{dx} = \frac{d\zeta}{dx}$, $\lim \frac{d^2\zeta_m}{dx^2} = \frac{d^2\zeta}{dx^2}$, falls ζ eine Funktion ist, die nebst $\frac{d\zeta}{dx}$ in a und b verschwindet, im Intervall $a\,b$ nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig und endlich, und im übrigen willkürlich ist. Bei dieser Bestimmung der ζ_m kann man also zur Grenze übergehen: das Glied in $\zeta'_m(b)$ konvergiert gegen Null, es bleibt

$$\int_a^b (u f_1 - P) \frac{d^2 \zeta}{dx^2} dx = 0$$

für jedes ζ. Auf dieses Integral läßt sich nun das *Hilbert*sche Lemma anwenden, und ergibt

$$u f_1 - P = c_1 + c_2 x, \tag{62.}$$

wo c_1, c_2 Konstanten sind. Es ist also

$$u = \frac{c_1 + c_2 x + P}{f_1},$$

und da die Ableitung der rechten Seite existiert und stetig und endlich ist, gilt Gleiches von $\frac{du}{dx}$.

Durch Differentiation von (62.) ergibt sich aber

$$u' f_1 - \int_a^x [F + u(f_3 - f'_2)]\, dx = c_2,$$

so daß auch u'' existiert und die Gleichung

$$u'' f_1 + u' f'_1 + u(f'_2 - f_3) - F = 0 \tag{63.}$$

erfüllt ist, welche man direkt durch Variation von J erhalten würde. Das Problem ist damit gelöst.

Für nicht homogene lineare Gleichungen bleibt die Methode unverändert, nur daß $F(x)$ eine allgemeinere Form annimmt. Zum Beweise der Konvergenz ist es notwendig, die Existenz einer unteren Grenze des zu variierenden Integrals J zu zeigen. Man kann zu diesem Ende die Existenz eines partikulären Integrals y_1 der nicht homogenen Gleichung, sei es auf Grund der im Vorigen ausgeführten Lösung der homogenen Gleichung, sei es auch direkt aus den *Cauchy*schen Existenzsätzen, postulieren, und $y=y_1+u$ setzen; dann nimmt J eine Form an, aus welcher die Existenz einer unteren Grenze ohne weiteres folgt. Es ist dies im wesentlichen die Methode, die wir in § 1 angewendet haben. Bei der wirklichen Lösung des Problems wird man allerdings diese Transformation nicht ausführen, ebensowenig wie man das postulierte partikuläre Integral zu kennen braucht.

Die schwingende Saite.

§ 16.

Die Überlegungen des vorigen Paragraphen lassen sich nicht mehr anwenden, wenn der Integrand aufhört, eine *definite* Form zu sein. Es ist bekannt, daß die Natur der Lösungen in diesem Falle eine wesentlich andere ist, und daß die Eindeutigkeit der Lösung insbesondere, ebenso wie ihre Existenz, nicht mehr allgemein behauptet werden kann. Beispiele hierfür bieten die Eigenschwingungen elastischer Körper: wir wollen für den Fall der schwingenden Saite zeigen, daß, wenn auch der theoretische Konvergenzbeweis, wenigstens in der im Obigen dargestellten Form, versagt, die Methode nichtsdestoweniger anwendbar bleibt und *zu numerisch sehr brauchbaren Resultaten führt.*

Sei k^2 eine zunächst willkürliche Konstante, so sind die Gleichungen des Problems bekanntlich

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0;\ y(+1)=0;\ y(-1)=0, \tag{64.}$$

wobei die Saite in den Punkten $x=\pm 1$ festgehalten wird. Wegen der Homogenität kann man noch die Bedingung $\int_{-1}^{+1} y^2\,dx=1$ vorschreiben. Die Lösungen sind:

Fundamentalton: $y=\cos\frac{\pi x}{2}$, $k=\frac{\pi}{2}$; erster Oberton: $y=\sin\pi x$, $k=\pi$; zweiter Oberton $y=\cos\frac{3\pi x}{2}$, $k=\frac{3\pi}{2}$, usw.

Diese Lösungen wollen wir nach unserer Methode durch Polynome zu approximieren suchen, wobei wir uns auf die in x geraden Lösungen beschränken.

Das allgemeinste, in x gerade Polynom, welches den Bedingungen $y(\pm 1)=0$ genügt, ist

$$(65.) \qquad y_n=(1-x^2)[a_0+a_1x^2+a_2x^4+\cdots+a_nx^{2n}].$$

Die Gleichung (64.) entsteht durch die Forderung, es solle $\int_{-1}^{+1} y'^2\,dx$ unter der Bedingung $\int_{-1}^{+1} y^2\,dx=1$ ein Minimum werden.

Führen wir hier y_n an Stelle von y ein und setzen

$$J_n=\int_{-1}^{+1}\{y_n'^2-k_n^2y_n^2\}\,dx,$$

so haben wir die a_i so zu bestimmen, daß J_n ein Minimum wird, oder, besser gesagt, daß

$$(66.) \qquad \frac{\partial J_n}{\partial a_0}=0,\ \frac{\partial J_n}{\partial a_1}=0,\ \ldots\ \frac{\partial J_n}{\partial a_n}=0$$

ist. Soll dieses System linearer Gleichungen eine Lösung besitzen, so muß seine Determinante verschwinden, woraus sich eine Gleichung $n+1$-ten Grades für k_n^2 ergibt, deren Wurzeln $k_1^{(n)}<k_2^{(n)}<\cdots k_{n+1}^{(n)}$ sein mögen. Jeder dieser Wurzeln entspricht ein bestimmtes y_n, und man findet leicht, daß die kleinste dem Minimum von

$$\frac{\int_{-1}^{+1} y_n'^2\,dx}{\int_{-1}^{+1} y_n^2\,dx}$$

entspricht, für geeignete Wahl der a_n.

Nimmt n zu, so wird $k_1^{(n)}$ abnehmen und gegen eine Grenze konvergieren, welche $k=\frac{\pi}{2}$ entspricht (Fundamentalton). Auf die Konvergenz der y_n läßt sich daraus aber nicht in der bisherigen Weise schließen.

Die Koeffizienten der Gleichungen (66.), die die a_i bestimmen, sind linear in k^2 und enthalten, wegen

$$\int_{-1}^{+1} x^{2p}\,dx=\frac{2}{2p+1}$$

nur rationale Zahlen. Für $n=1$ (erste Approximation) wird

$$0=a_0\Big[1-\frac{2k^2}{5}\Big]-a_1\Big[-\frac{1}{5}+\frac{2k^2}{35}\Big];\ 0=\Big[1-\frac{2k^2}{7}\Big]-a_1\Big[-\frac{11}{7}+\frac{2k^2}{21}\Big],$$

woraus

$$k^4-28\,k^2+63=0;\ 2\,k_1^2=4{,}93488;\ 2\,k_2^2=51{,}2.$$

Aus den exakten Lösungen hätte sich ergeben

$$2\,k_1^2=\frac{\pi^2}{2}=4{,}934.802.200;\ 2\,k_2^2=\frac{9\pi^2}{2}=44{,}414,$$

so daß schon in erster Annäherung die Tonhöhe des Fundamentaltons auf $\frac{2}{100000}$ richtig ist, während, wie ja zu erwarten, die des zweiten Obertons nur auf 10 % genau sich findet.

In *zweiter Approximation* ($n=2$) wird, falls $2\,k^2=\lambda$ gesetzt wird,

$$\lambda^3-225\,\lambda^2+8910\,\lambda-38610=0.$$

Wir benutzen die schon gefundenen Näherungswerte $\lambda=2\,k_1^2$, $\lambda=2\,k_2^2$ und erhalten die neuen Werte

$$2\,k_1^2=4{,}934.802.217;\ 2\,k_2^2=44{,}602.$$

Der Fehler des Fundamentaltons in zweiter Annäherung beträgt 4 *Milliardstel*, der des zweiten Obertons ½ %; der vierte Oberton wird nur roh angenähert erhalten (dritte Wurzel der Gleichung).

Die Konvergenz ist also eine ungewöhnlich gute. Man bemerke, daß sich hieraus sukzessive Approximationen von π durch algebraische Zahlen ergeben.

Berechnet man nun in zweiter Approximation a_0, a_1 und a_2, so findet sich als angenäherte Darstellung von $\cos\frac{\pi x}{2}$:

$$y_2(x) = (1-x^2)[1 - 0{,}233430\,x^2 + 0{,}018962\,x^4]$$

und für die Werte $x = 0{,}1; 0{,}2; \ldots 0{,}9$ von x erhält man für $\log\cos\frac{\pi x}{2}$ und $\log y_n$ die Tabelle

$x =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\log\cos\frac{\pi x}{2} =$	994620	978206	949881	907958	849485
$\log y_n =$	994621	978212	949889	907952	849493

$x =$	0,6	0,7	0,8	0,9
$\log\cos\frac{\pi x}{2} =$	769219	657047	489982	194332
$\log y_n =$	769221	657043	489978	194345

wobei nur die Mantissen der Logarithmen geschriebensind; für $x = -1$ und $x = 1$ ist übereinstimmend $y_n = \cos\frac{\pi x}{2} = 0$. *Die Annäherung ist also im ganzen Gebiet* -1 *bis* $+1$ *eine sehr befriedigende**).

Für den Oberton ist es vor allem wichtig, die Stellung der zwei Knoten $\left(\text{theoretisch } x = \pm\frac{1}{3}\right)$ zu berechnen. Es wird

$$y_2^{(2)}(x) = (1-x^2)[-1 + 9{,}3335\,x^2 - 6{,}219\,x^4]$$

---

*) Im vorliegenden Falle kann man auch durch Potenzreihen integrieren. Beschränkt man sich, wie in y_2, auf Potenzen von x die $\leqq 6$ sind, so wird die Annäherung an $y(x)$ eine ungefähr eben so gute, der Fehler des Fundamentaltons dagegen ist 10000 mal größer als hier.

und die Klammer verschwindet für $x = 0{,}3408$: die Stellung des Knoten ist also auf 2 % genau angegeben.

Man wird aus diesem Beispiel schließen, daß unsere Methode für die Berechnung der Schwingungszahl des Fundamentaltons einer Saite, Membran oder Platte besonders vorteilhaft ist, und daß je höher der Oberton ist, mit dem man es zu tun hat, um so größer die Anzahl Konstanten a_i sein wird, die man zu berechnen hat, um eine gegebene Genauigkeit zu erreichen. Auch auf die Untersuchung der *Chladni*schen *Klangfiguren* ist die Methode somit anwendbar: bei transversal schwingenden Platten ist das Problem bis jetzt, im Fall eines freien Randes, erst für den Kreis gelöst. Aber auch bei ringsum eingespannten rechteckigen Platten ist die Lösung noch unbekannt: es läßt sich leicht zeigen, daß die Eckpunkte singulär sind, und in ihrer Umgebung eine Entwicklung nach Potenzreihen nicht möglich ist. Hier ist der Umstand von großem Vorteil, daß unsere Methode, z. B. bei Anwendung von Polynomen, auch in solchen singulären Punkten anwendbar bleibt, sofern nur die Stetigkeitsbedingungen nicht verletzt werden. Auf diese Anwendung der neuen Methode auf transversale Schwingungen ebener rechteckiger Platten werde ich an anderer Stelle zurückkommen.

Nach dem vorliegenden Beispiel dürfte jedenfalls der Physiker bei der Anwendung des neuen Rechnungsverfahrens auch in Fällen, wo der theoretische Konvergenzbeweis zunächst noch fehlt, sich durch diesen Mangel nicht allzusehr beunruhigt fühlen.

Zur Theorie der *Schapira*schen Iteration.

Von Herrn *Ludwig v. Dávid* in Klausenburg.

Einleitung.

Es ist bekannt, daß bei dem Algorithmus des *Lagrange-Gauß*schen arithmetisch-geometrischen Mittels*)

$$ {}^{(i+1)}a_1 = \frac{1}{2}\left({}^{(i)}a_1 + {}^{(i)}a_2\right), \quad {}^{(i+1)}a_2^2 = {}^{(i)}a_1\,{}^{(i)}a_2, \qquad (i=0,1,2,\ldots) $$

(wo ${}^{(0)}a_1, {}^{(0)}a_2$ positive**) Zahlen sind und immer die positiven Quadratwurzeln genommen werden), $\lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_\nu$ $(\nu=1,2)$, als positive Zahlen existieren und

$$ \lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_1 = \lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_2 $$

ist. Diesen Grenzwert kann man durch ein komplettes elliptisches Integral erster Gattung darstellen.

*Schapira****) hat eine interessante Verallgemeinerung dieses in der Theorie der elliptischen Funktionen bei *Gauß* so charakteristischen†) Algorithmus gegeben, indem er an Stelle der von *Gauß* zugrunde gelegten Gleichung 2. Grades:

---

*) *Lagrange*, Oeuvres II, p. 252. — *Gauss*, Werke III, S. 352 ff.

**) Es sei im folgenden positiv = reell, nicht negativ; wesentlich positiv = reell, größer als Null.

***) *H. Schapira*, Über ein allg. Prinzip algebraischer Iteration. (Vortrag.) Verhandl. des Naturhist.-Medizin. Vereins zu Heidelberg. N. F. IV. Bd., 1. H. (1887).

†) Vgl. *L. Schlesinger*, Über die *Gauss*sche Theorie des arith.-geometr. Mittels und ihre Beziehungen zur Theorie der ellipt. Modulfunktion. — Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, XXVIII. (1898) S. 346 ff.

L. v. Dávid, Theorie des verallg. u. spez. arithm.-geometr. Mittels. — Math. u. Naturwissensch. Ber. aus Ungarn. XXV. (1907) S. 153 ff.

$$x^2 - 2\,{}^{(i+1)}a_1\,x + {}^{(i+1)}a_2^2 \equiv (x - {}^{(i)}a_1)\,(x - {}^{(i)}a_2),$$

eine Gleichung n-ten Grades:

$$x^n - (n)_1\,{}^{(i+1)}a_1\,x^{n-1} + (n)_2\,{}^{(i+1)}a_2^2\,x^{n-2} - \cdots + (-1)^n\,(n)_n\,{}^{(i+1)}a_n^n \equiv (x - {}^{(i)}a_1)\,(x - {}^{(i)}a_2) \cdots (x - {}^{(i)}a_n),$$

(wo $(n)_\nu = \binom{n}{\nu}$ ist,) eingeführt hat.

So ergibt sich der folgende Algorithmus*):

$$(1.) \qquad {}^{(i+1)}a_\nu^\nu = \frac{1}{(n)_\nu}\,\Sigma\,{}^{(i)}a_{r_1}\,{}^{(i)}a_{r_2} \cdots {}^{(i)}a_{r_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

Es seien vorläufig ${}^{(0)}a_1, {}^{(0)}a_2, \ldots {}^{(0)}a_\nu$ positive Zahlen und überdies soll vorerst die Beschränkung bestehen, daß für ${}^{(i+1)}a_\nu$ die aus (1.) sich ergebende positive ν-te Wurzel genommen werden soll. *Schapira* hat dann durch eine direkte Verallgemeinerung der für $n = 2$ bekannten *Lagrange-Gauß*schen Methode bewiesen**), daß $\lim\limits_{i=\infty} {}^{(i)}a_\nu$ für $n = 3, 4, 5$, als positive Zahlen existieren und daß, wenn wir auch den Fall $n = 2$ hinzufügen,

$$\lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_1 = \lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_2 = \cdots = \lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_n \qquad (n = 2, 3, 4, 5)$$

ist.

In einer kleinen Mitteilung***) habe ich gezeigt, daß dies für jedes n besteht und zwar als ein Spezialfall des folgenden allgemeinen Satzes:

Satz I. *Sind* $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots a_n^{(i)}$, $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ *unendliche Folgen mit positiven Gliedern, bei welchen*

$$(\alpha) \qquad a_1^{(i)} \geqq a_\nu^{(i)}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

$$(\beta) \qquad a_1^{(i+1)} = \frac{1}{n}\,(a_1^{(i)} + a_2^{(i)} + \cdots + a_n^{(i)})$$

ist, so konvergieren diese Folgen gegen einen und denselben positiven Grenzwert, d. h. es ist

$$\lim_{i=\infty} a_1^{(i)} = \lim_{i=\infty} a_2^{(i)} = \cdots = \lim_{i=\infty} a_n^{(i)}.$$

---

*) Es ist zweckmäßig mit *Schapira*, im Anschluß an *Lagrange*, den Iterationsindex links oben zu schreiben.

**) a. a. O. § 2.

***) Math. u. Naturwissensch. Ber. aus Ungarn, XXV, (1907) (Unter der Presse).

In der Tat darf man $a_\nu^{(i)} = {}^{(i)}a_\nu$ setzen (vgl. (1.) für $\nu = 1$), wenn gezeigt wird, daß

$$ {}^{(i)}a_1 \geqq {}^{(i)}a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Diese Ungleichungen folgen aber z. B. aus einer etwas schwerfälligen Identität von *Schapira**), oder durch die einfacheren Betrachtungen des Herrn *Brunn***).

Es mögen nunmehr ${}^{(0)}a_1, {}^{(0)}a_2, \ldots {}^{(0)}a_n$ beliebige komplexe Zahlen bedeuten und die Wurzeln in (1.) ganz beliebig gewählt werden mit der einzigen naturgemäßen Voraussetzung, daß der Algorithmus *iterativ* bleibt. Dies soll bedeuten, daß die ${}^{(i+1)}a_\nu$ sukzessive für $i = 1, 2, 3, \ldots$ aus denjenigen ${}^{(i)}a_\nu$ entspringen, welche aus den ${}^{(i-1)}a_\nu$ abgeleitet wurden. Ist der Algorithmus (1) iterativ, so nennen wir denselben eine *Schapirasche Iteration.****)

Im folgenden geben wir zuallererst einen Satz (II. des I. Abschnitts), der eine Verallgemeinerung des Satzes I. darstellt. Dieser Satz (II.) allein reicht zum Existenzbeweise der $\lim_{i=\infty} |{}^{(i)}a_\nu|$ und zum Beweise der Gleichungen

$$(2\,\text{a.}) \qquad \lim_{i=\infty} |{}^{(i)}a_1| = \lim_{i=\infty} |{}^{(i)}a_2| = \cdots = \lim_{i=\infty} |{}^{(i)}a_n|$$

aus. Wenn dann z. B. $0 \leqq \operatorname{arcus}\, {}^{(i)}a_\nu < 2\pi$ gesetzt wird, so beweisen wir auf Grund eines Hilfssatzes (C.) die Existenz der $\lim_{i=\infty} \operatorname{arc}\, {}^{(i)}a_\nu$ und das Bestehen der Gleichungen

$$(2\,\text{b.}) \qquad \lim_{i=\infty} \operatorname{arc}\, {}^{(i)}a_1 = \lim_{i=\infty} \operatorname{arc}\, {}^{(i)}a_2 = \cdots = \lim_{i=\infty} \operatorname{arc}\, {}^{(i)}a_n .$$

Aus (2a.) und (2b.) folgt endlich der *Fundamentalsatz*: *Sind* ${}^{(0)}a_1$, ${}^{(0)}a_2, \ldots {}^{(0)}a_n$ *beliebige komplexe Zahlen und ist der Algorithmus*

$$ {}^{(i+1)}a_\nu^\nu = \frac{1}{(n)_\nu} \Sigma\, {}^{(i)}a_{r_1}\, {}^{(i)}a_{r_2} \ldots {}^{(i)}a_{r_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)\ (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

iterativ, so existieren die Grenzwerte $\lim {}^{(i)}a_\nu$ *und es gelten die Gleichungen*

---

*) a. a. O. § 2. 4.) I.

**) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 37. (1892) S. 60—63, vgl. auch die daselbst angeführte weitere Literatur.

***) Herr Prof. *L. Schlesinger* hatte die Freundlichkeit mich darauf aufmerksam zu machen, daß *E. Meißel* (Grunerts Arch. LVII. 1875. S. 446) den Fall $n = 3$ behandelt hat.

$$\lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_1 = \lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_2 = \cdots = \lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_n,$$

wie immer auch die Wurzeln für ${}^{(i+1)}a_\nu$ *gewählt werden. Von der Wahl der Wurzeln hängt nur (im allgemeinen) der Wert des gemeinsamen Grenzwertes ab.*

I. Beweis des Fundamentalsatzes.

1. Die Summenzeichen sollen überall dieselbe bzw. analoge kombinatorische Bedeutung haben wie bei (1.). Der erwähnte Satz II. lautet dann folgendermaßen:

Satz II. *Sind* $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots a_n^{(i)}, (i=0,1,2,\ldots)$ *solche unendliche Folgen mit positiven Gliedern, bei welchen, wenn*

$$(\alpha) \qquad a_{m_i}^{(i)} \geqq a_\nu^{(i)}, \qquad (\nu=1,2,\ldots n)$$

wenigstens für einen der zu i $(i=1,2,3,\ldots)$ *gehörigen Werte* m_i

$$(\beta) \qquad (a_{m_i}^{(i)})^{m_i} \leqq \frac{1}{(n)_{m_i}} \Sigma a_{r_1}^{(i-1)} a_{r_2}^{(i-1)} \ldots a_{r_{m_i}}^{(i-1)} \qquad (i=1,2,3,\ldots)$$

ist, so konvergieren diese Folgen gegen einen und denselben positiven Grenzwert, d. h. es ist

$$\lim_{i=\infty} a_1^{(i)} = \lim_{i=\infty} a_2^{(i)} = \cdots = \lim_{i=\infty} a_n^{(i)}.$$

Der Satz I. ergibt sich aus diesem Satze, wenn es für jedes $i=1,2,3,\ldots$ ein $m_i=1$ gibt, für welches die $a_1^{(i)}$ die Relation (β) mit dem Gleichheitszeichen erfüllen. Zum Beweise des Satzes II. dienen die folgenden einfachen Hilfssätze:

A. Sind $c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \ldots c_r^{(i)}$, $(i=0,1,2,\ldots)$ solche unendlichen Folgen mit positiven Gliedern, für welche der positive Grenzwert

$$\lim_{i=\infty} (c_1^{(i)} + c_2^{(i)} + \cdots + c_r^{(i)}) = r\,c$$

existiert, und für die sich einer beliebig gegebenen, wesentlich positiven Größe ε eine Zahl J derart zuordnen läßt, daß

$$c_\varrho^{(i)} \leqq c+\varepsilon \qquad (\varrho=1,2,\ldots r)$$

bleibt, falls $i>J$ ist, so existieren $\lim_{i=\infty} c_\varrho^{(i)}$ als positive Zahlen und es ist

$$\lim_{i=\infty} c_1^{(i)} = \lim_{i=\infty} c_2^{(i)} = \cdots = \lim_{i=\infty} c_r^{(i)} = c.$$

B. Sind $c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, \ldots c_r^{(i)}$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$ solche unendlichen Folgen mit positiven Gliedern, für welche der positive Grenzwert

$$\lim_{i=\infty} (c_1^{(i)} c_2^{(i)} \ldots c_r^{(i)}) = c^r$$

existiert und für die sich einer beliebig gegebenen, wesentlich positiven Größe ε eine Zahl J derart zuordnen läßt, daß

$$c_\varrho^{(i)} \leqq c + \varepsilon \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots r)$$

bleibt, falls $i>J$ ist, so existieren $\lim_{i=\infty} c_\varrho^{(i)}$ als positive Zahlen und es ist

$$\lim_{i=\infty} c_1^{(i)} = \lim_{i=\infty} c_2^{(i)} = \cdots = \lim_{i=\infty} c_r^{(i)} = c.$$

Beweis des Hilfssatzes A. Zufolge der Voraussetzung muß sich einer beliebig gegebenen, wesentlich positiven Größe δ ein J derart zuordnen lassen, daß

$$r c - \delta \leqq c_1^{(i)} + c_2^{(i)} + \cdots + c_r^{(i)} \leqq r c + \delta,$$

falls $i>J$ ist. Es sei

$$c_\varrho^{(i)} = c + \omega_\varrho^{(i)}. \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots r)$$

Dann ist

$$-\delta \leqq s_1^{(i)} + s_2^{(i)} \leqq \delta$$

für $i>J$, wenn $s_1^{(i)}$ die Summe der positiven, $s_2^{(i)}$ die Summe der negativen $\omega_\varrho^{(i)}$ bedeutet. Man kann J so groß annehmen, daß $s_1^{(i)} \leqq \delta$ bleibt, falls $i>J$ ist. Es ergibt sich die Ungleichung

$$-2\delta \leqq s_2^{(i)}.$$

Und da hier statt $s_2^{(i)}$ jedes negative $\omega_\varrho^{(i)}$ geschrieben werden kann, so folgt die Gleichung $\lim_{i=\infty} \omega_\varrho^{(i)} = 0$, d. h. die Richtigkeit des Hilfssatzes A.

Beweis des Hilfssatzes B. Im Falle $c=0$ ist die Behauptung evident Es sei also $c>0$. Dann läßt die Analogie mit dem Hilfssatze A leicht erkennen, daß man B durch Logarithmieren auf A zurückführen kann.

Nunmehr beweisen wir den Satz II. in folgender Art. Nach den Voraussetzungen ist

$$(a_{m_i}^{(i)})^{m_i} \leqq \frac{1}{(n)_{m_i}} \Sigma a_{m_i-1}^{(i-1)} a_{m_i-1}^{(i-1)} \dots a_{m_i-1}^{(i-1)} = (a_{m_i-1}^{(i-1)})^{m_i},$$

d. h.

(a) $$a_{m_i}^{(i)} \leqq a_{m_i-1}^{(i-1)}.$$

Es existiert also der positive Grenzwert

(b) $$\lim_{i=\infty} a_{m_i}^{(i)} = a,$$

und es ist für jedes i

(c) $$a_{m_i}^{(i)} \geqq a.$$

Wir greifen der Reihe nach alle diejenigen i-Werte

(d) $$i_1 < i_2 < i_3 < \dots$$

heraus, zu welchen wenigstens ein gemeinsamer und die Relation (β) befriedigender Wert m_i gehört. Es sei dieser gemeinsame Wert $m_{i_\lambda} = \mu$ ($\lambda = 1, 2, 3, \dots$). Also ist nach (β)

(e) $$(a_\mu^{(i_\lambda)})^\mu \leqq \frac{1}{(n)_\mu} \Sigma a_{r_1}^{(i_\lambda - 1)} a_{r_2}^{(i_\lambda - 1)} \dots a_{r_\mu}^{(i_\lambda - 1)} \leqq (a_{m_{i_\lambda}-1}^{(i_\lambda - 1)})^\mu.$$

Es gibt höchstens n solche Folgen i_λ; also ist wenigstens eine derselben z. B. i_λ bei (d) unendlich. Aus (e) und (b) findet man, daß der Grenzwert bei (f) existiert und

(f) $$\lim_{\lambda=\infty} \Sigma\, a_{r_1}^{(i_\lambda-1)}\, a_{r_2}^{(i_\lambda-2)} \dots a_{r_\mu}^{(i_\lambda-1)} = (n)_\mu\, a^\mu$$

ist. Zufolge von (c) und mit Rücksicht auf (b) können wir schreiben

(g) $$a_\nu^{(i_\lambda-1)} \leqq a+\delta, \qquad (\nu=1,2,\dots n)$$

wo δ eine beliebig gegebene, wesentlich positive Größe ist und i größer als ein gewisses J genommen wird. Man kann also δ derart bestimmen, daß sogar

(h) $$a_{r_1}^{(i_\lambda-1)}\, a_{r_2}^{(i_\lambda-1)} \dots a_{r_\mu}^{(i_\lambda-1} \leqq a^\mu+\varepsilon$$

ist, wo ε eine wesentlich positive, beliebig gegebene Größe bedeutet. Die Relationen (f) und (h) gestatten, den Hilfssatz A anzuwenden. Es ergibt sich, daß die $(n)_\mu$ Grenzwerte bei (f) unter dem Summenzeichen existieren und

(i) $$\lim_{\lambda=\infty} a_{r_1}^{(i_\lambda-1)}\, a_{r_2}^{(i_\lambda-1)} \dots a_{r_\mu}^{(i_\lambda-1)} = a^\mu$$

ist. Ferner gestatten die Relationen (i) und (g) die Anwendung des Hilfssatzes B. Es ergibt sich, daß selbst die n Grenzwerte $\lim_{\lambda=\infty} a_\nu^{(i_\lambda-1)}$ $(\nu=1,2,\dots n)$ existieren und

(j) $$\lim_{\lambda=\infty} a_\nu^{(i_\lambda-1)} = a \qquad (\nu=1,2,\dots n)$$

ist. Durch Wiederholung dieser Schlußweise bei allen unendlichen Folgen i_λ schließt man sofort, daß $\lim_{i=\infty} a_\nu^{(i)} = a$ $(\nu=1,2,\dots n)$ existieren, und hiermit ist der Beweis des Satzes II. geliefert.

2. Wenn wir annehmen, daß der Algorithmus (1.) iterativ ist, so bedeutet ${}^{(i)}a_\nu$ eine gewisse, sonst beliebige Zahl unter denjenigen, die für ${}^{(i)}a_\nu$ dem Algorithmus (1.) gemäß gefunden werden*). Dann darf man

*) Die größtmögliche Anzahl dieser ${}^{(i)}a_\nu$ kann man leicht durch $n!$, ν und i ausdrücken.

(k) $$a_\nu^{(i)} = |{}^{(i)}a_\nu|$$

setzen. Der Satz II. liefert unmittelbar die Richtigkeit der Gleichungen (2a.).

Wenn die ${}^{(0)}a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ positive Zahlen sind und für die ${}^{(i)}a_\nu$ immer die positiven Wurzeln genommen werden, d. h.

$$|{}^{(i)}a_\nu| = {}^{(i)}a_\nu$$

ist, so folgt aus den Gleichungen (2a.) der Fundamentalsatz. Ebenso gelangen wir zum Fundamentalsatze, wenn der gemeinsame Grenzwert in (2a.) gleich Null ist.

Wir nehmen jetzt an, es sei jener gemeinsame Grenzwert größer als Null. Also ist ${}^{(i)}a_\nu \neq 0$ für jedes ν und i, da sonst ${}^{(i+1)}a_n = {}^{(i+2)}a_n = \cdots$ in inf. $= 0$ wäre. Folglich ist arc ${}^{(i)}a_\nu$ bestimmt, wenn z. B.

$$0 \leqq \operatorname{arc} {}^{(i)}a_\nu = \alpha_\nu^{(i)} < 2\pi$$

genommen wird. Nunmehr beweisen wir die Gleichungen (2b.).

Aus dem Algorithmus (1.) folgt:

$$n\,{}^{(i+1)}a_1 = {}^{(i)}a_1 + \cdots + {}^{(i)}a_n.$$

Die Zerlegung von ${}^{(i+1)}a_1$ in reelle Komponenten ergibt:

$$n|{}^{(i+1)}a_1| \cos \alpha_1^{(i+1)} = |{}^{(i)}a_1| \cos \alpha_1^{(i)} + \cdots + |{}^{(i)}a_n| \cos \alpha_n^{(i)},$$
$$n|{}^{(i+1)}a_1| \sin \alpha_1^{(i+1)} = |{}^{(i)}a_1| \sin \alpha_1^{(i)} + \cdots + |{}^{(i)}a_n| \sin \alpha_n^{(i)}.$$

Also ist

$$n^2 |{}^{(i+1)}a_1|^2 = |{}^{(i)}a_1|^2 + \cdots + |{}^{(i)}a_n|^2 + 2|{}^{(i)}a_1\ {}^{(i)}a_2| \cos(\alpha_1^{(i)} - \alpha_2^{(i)}) + \cdots.$$

Bezeichnen wir den gemeinsamen Grenzwert in (2a.) durch a, so folgt aus der letzten Gleichung, daß

$$|n^2 a^2 - n a^2 - 2 a^2 \cos(\alpha_1^{(i)} - \alpha_2^{(i)}) - \cdots| \leqq \delta$$

bleibt, falls i größer als ein gewisses J ist; δ bedeutet eine beliebig gegebene wesentlich positive Größe. Es existiert also der Grenzwert

$$\lim_{i=\infty}(\cos(\alpha_1^{(i)}-\alpha_2^{(i)})+\cdots)=(n)_2,$$

weil $a>0$ ist. Auf der linken Seite stehen $(n)_2$ Kosinus. Es existieren also die sämtlichen Grenzwerte*)

$$\lim_{i=\infty}\cos(\alpha_{r_1}^{(i)}-\alpha_{r_2}^{(i)})=1. \tag{1}$$

Wir bedienen uns im folgenden, der Bequemlichkeit wegen, einiger geometrischer Vorstellungen und der geometrischen Ausdrucksweise. Die ${}^{(i)}a_\nu$ seien durch die Punkte einer Ebene in üblicher Weise dargestellt. Der Anfangspunkt des rechtwinkligen Koordinatensystems sei 0. Nehmen wir an, daß die Halbstrahlen $0\,{}^{(i)}a_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots n)$ bei einem gewissen i-Werte in einer Halbebene, d. h. auf einer Seite einer durch 0 gehenden Geraden oder auf dieser Geraden selbst liegen. Dann verstehen wir unter dem Winkel der Halbstrahlen $0\,{}^{(i)}a_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots n)$ den positiven Winkel, der durch die beiden „äußersten" der Strahlen $0\,{}^{(i)}a_\nu$ begrenzt wird. Derselbe ist also der kleinste Winkel, der sämtliche Halbstrahlen $0\,{}^{(i)}a_\nu$ (bei dem betreffenden i-Wert) enthält. Sind die ${}^{(i)}a_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots n)$ schon bestimmt, so gibt es, nach (1.), ν Werte für ${}^{(i+1)}a_\nu$, die auf dem Kreise liegen, der mit dem Radius $|{}^{(i+1)}a_\nu|$ um den Anfangspunkt 0 beschrieben ist. Nunmehr beweisen wir den Hilfssatz:

C. Ist der Winkel der Halbstrahlen $0\,{}^{(i)}a_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots n)$ (bei einem gewissen Wert von i) kleiner als π/n, so liegt ein und nur ein Wert von ${}^{(i+1)}a_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots n)$ in jenem Winkel.

Beweis. Wenn ${}^{(i)}a_{r_1}\,{}^{(i)}a_{r_2}\ldots{}^{(i)}a_{r_\nu}=b_{r,\nu}^{(i)}$ gesetzt wird, so ist

$$\text{arc } b_{r,\nu}^{(i)}\equiv\text{arc }{}^{(i)}a_{r_1}+\text{arc }{}^{(i)}a_{r_2}+\cdots+\text{arc }{}^{(i)}a_{r_\nu}. \pmod{2\pi}$$

Es sei z. B. arc ${}^{(i)}a_{r_1}$ der kleinste unter den arc ${}^{(i)}a_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots n)$. Denken wir uns das Koordinatensystem um den Anfangspunkt 0 um den Winkel

*) Man kann dies z. B. aus dem Hilfssatze A. $(r=(n)_2,\ c=1)$ folgern.

– arc ${}^{(i)}a_1$ gedreht, so sieht man, daß der Winkel der $(n)_\nu$ Halbstrahlen $0\, b^{(i)}_{r,\nu}$ kleiner ist als $\nu\pi/n$, also jedenfalls kleiner als π. Der Punkt ${}^{(i+1)}a^\nu_\nu$ liegt in diesem Winkel, weil

$$ {}^{(i+1)}a^\nu_\nu = \frac{1}{(n)_\nu} \Sigma\, b^{(i)}_{r,\nu} $$

ist. Ein Wert von ${}^{(i+1)}a_\nu$, nämlich der, welcher den Arcus

$$ \frac{1}{\nu} \operatorname{arc} {}^{(i+1)}a^\nu_\nu < \frac{\pi}{n} $$

hat, liegt in dem Winkel der Halbstrahlen $0\,{}^{(i)}a_\nu$. Es kann aber auch nicht mehr als ein Wert ${}^{(i+1)}a_\nu$ in jenem Winkel liegen, weil $\pi/n < 2\pi/\nu$ ist. W. z. b. w.

Man kann, zufolge von (l), J so groß wählen, daß der Winkel der Halbstrahlen $0\,{}^{(i)}a_\nu$ kleiner als $\varepsilon < \pi/n$ ist, wenn $i > J$ und ε eine beliebig gegebene, wesentlich positive Größe ist. Also liegt nach C. ein und nur ein Wert von ${}^{(i+1)}a_\nu$ in diesem Winkel. Man kann ε so klein annehmen, daß nur dieser ${}^{(i+1)}a_\nu$-Wert der Relation (l) entspricht. Der Winkel der Halbstrahlen $0\,{}^{(i+s)}a_\nu$ ist aber beliebig klein und in dem Winkel der Halbstrahlen $0\,{}^{(i)}a_\nu$ enthalten, was für eine ganze positive Zahl auch s bedeutet, wenn nur $i > J$ ist. Also existiert $\lim_{i=\infty} \operatorname{arc} {}^{(i)}a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$, und es gelten die Gleichungen (2b.) Der Beweis des Fundamentalsatzes ist somit in allen Teilen erbracht.

Wir bezeichnen (entsprechend der *Gauß*schen Bezeichnung für $n=2$) $\lim {}^{(i)}a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ mit $M({}^{(0)}a_1, \ldots {}^{(0)}a_n)$, event. einfach mit M.

Der Fundamentalsatz definiert diese *Grenzfunktion**) von n Variabeln.

II. Bemerkungen über die Funktion M.

1. *Die Funktion M ist, im allgemeinen***), *eine mehrdeutige Funktion*, entsprechend der Mehrdeutigkeit der ${}^{(i+1)}a_\nu$ und $\lim_{i=\infty} {}^{(i)}a_\nu$. Die Relationen (a) und (k) in I. zeigen, daß für jeden der Werte von M

---

*) Diese Benennung kommt bei *Schapira* vor, a. a. O. Einleitung.

**) Es ist aber z. B. $M({}^{(0)}a_1, \ldots, 0, \ldots, {}^{(0)}a_n)$ immer gleich Null.

$$(1.) \qquad |M(a_1, \dots a_n)| \leqq \mathbf{Max}\,(|a_1|, \dots |a_n|),$$

wenn der Einfachheit halber ${}^{(0)}a_\nu$ durch a_ν bezeichnet wird.

Eine andere obere Grenze für $|M|$ ergibt sich auf folgende Weise. Sind $c_1, \dots c_n$ positive Zahlen, dann soll

$$\overline{M}(c_1, \dots c_n)$$

denjenigen Wert von $M(c_1, \dots c_n)$ bedeuten, zu welchem man gelangt, wenn für ${}^{(i)}c_\nu$ immer die positiven Wurzeln genommen werden.

Aus dem Algorithmus (1.) in I folgt

$$|{}^{(i+1)}a_\nu^\nu| \leqq \frac{1}{(n)_\nu} \Sigma\, |{}^{(i)}a_{\nu_1}| \dots |{}^{(i)}a_{\nu_\nu}|.$$

Also ist

$$(2.) \qquad \overline{M}(|{}^{(i+1)}a_1|, \dots |{}^{(i+1)}a_n|) \leqq \overline{M}(|{}^{(i)}a_1|, \dots |{}^{(i)}a_n|). \qquad (i=0,1,2,\dots)$$

Nehmen wir in der Ungleichung (2.) $i=0, \dots \infty$ und berücksichtigen, daß

$$\overline{M}(|a|, \dots |a|) = |a|$$

ist, so erhält man

$$(3.) \qquad |M(a_1, \dots a_n)| \leqq \overline{M}(|a_1|, \dots |a_n|).$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier nur in den beiden folgenden Fällen:

(α) wenn $a_\nu = |a_\nu|$, $(\nu=1,2,\dots n)$

und auf der linken Seite der Wert $\overline{M}(a_1, \dots a_n)$ genommen wird;

(β) wenn $\operatorname{arc} a_1 = \operatorname{arc} a_2 = \dots = \operatorname{arc} a_n$

ist und auf der linken Seite der Wert

$$e^{-\nu -1 \arg a_1} \bar{M}(|a_1|, \dots |a_n|) .$$

genommen wird.

Also ist eine weitere Verschärfung für die obere Grenze von $|M|$ nicht möglich.

Die Funktion M nimmt stets den Wert Null an. **In der Tat, nehmen wir an, daß kein Wert von M gleich Null wäre. Dann bestehen die Gleichungen (2b.), wie immer auch die Wurzeln für $^{(i)}a_\nu$ gewählt werden, wenn nur der Algorithmus iterativ ist.**

Man kann aber $^{(i)}a_\nu$ so wählen, daß z. B.

$$|\arg {}^{(i)}a_{r_1} - \arg {}^{(i)}a_{r_2}| \geqq \frac{\pi}{n} \qquad (i=1, 2, 3, \dots)$$

ist, und dieser Umstand widerspricht dem Fundamentalsatze.

2. *Die Funktion M ist symmetrisch*, **d. h. es ist:**

$$M(a_1, a_2, \dots a_n) = M(a_{r_1}, a_{r_2}, \dots a_{r_n}). \tag{4.}$$

Die Gleichung (4.) bedeutet eigentlich, wie die Konstruktion der *Schapira*schen Iteration lehrt, daß jedem Wert von $M(a_1, a_2, \dots a_n)$ ein demselben gleicher Wert von $M(a_{r_1}, a_{r_2}, \dots a_{r_n})$ entspricht und umgekekrt. In demselben Sinn hat man die Gleichung

$$M(\varrho\, a_1, \dots \varrho\, a_n) = \varrho\, M(a_1, \dots a_n) \tag{5.}$$

aufzufassen. Schlechthin besagt diese Gleichung, daß *die Funktion M homogen vom ersten Grade ist.*

Endlich können wir sagen, daß *sämtliche Werte von $M(^{(i)}a_1, \dots {}^{(i)}a_n)$ unter den Werten von $M(a_1, \dots a_n)$ enthalten sind, aber im allgemeinen nicht umgekehrt.*

Also ist

$$M({}^{(i)}a_1, \dots {}^{(i)}a_n) = M(a_1, \dots a_n), \tag{6.}$$

wenn $^{(s)}a_\nu$ $(s = i, i+1, \dots)$ auf beiden Seiten dasselbe ist.

Die Gleichungen (4.), (5.) und (6.) gelten aber bei positiven $c_1, \dots c_n$ für $\overline{M}$ ohne jeden Zusatz:

$$\begin{aligned} &\overline{M}(c_1, c_2, \dots c_n) = \overline{M}(c_{r_1}, c_{r_2} \dots c_{r_n}), \\ &\overline{M}(|\varrho| c_1, \dots |\varrho| c_n) = |\varrho| \overline{M}(c_1, \dots c_n), \\ &\overline{M}({}^{(i)}c_1, \dots {}^{(i)}c_n) = M(c_1, \dots e_n). \end{aligned} \tag{7.}$$

Endlich bemerken wir, daß aus dem Bestehen der *Funktionalgleichungen*

$$\begin{aligned} &f({}^{(i)}c_1, \dots {}^{(i)}c_n) = f(c_1, \dots c_n), \\ &f(|a|, \dots |a|) = |a| \end{aligned}$$

die Identität von f und $\overline{M}$ folgt. Dies hat *Borchardt**) für $n=2$ bestätigt, und sein Verfahren ist wörtlich für ein beliebiges n anwendbar.

---

*) Werke, S. 121 ff.

Über eine von *Hermite* herrührende Substitution zur Reduktion des elliptischen Integrals erster Gattung auf die *Weierstrass*sche Normalform.

Von Herrn *E. Haentzschel* in Berlin.

Hermite hat im 52. Bande dieses Journals (S. 7–8; Berlin, 1856) die Transformation

$$(1.) \qquad s = -\frac{h(x)}{R(x)}$$

angegeben, mit deren Hilfe man $\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{S}}$ in $\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ überführen kann, wenn

$$\begin{aligned}
R(x) &= a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4, \\
h(x) &= (a_0 a_2 - a_1^2) x^4 + 2 (a_0 a_3 - a_1 a_2) x^3 + (a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 - 3 a_2^2) x^2 \\
&\quad + 2 (a_1 a_4 - a_2 a_3) x + (a_2 a_4 - a_3^2), \qquad (2.) \\
S &= 4 s^3 - g_2 s - g_3 = 4 (s - e_1) (s - e_2) (s - e_3), \\
g_2 &= a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2, \\
g_3 &= a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3,
\end{aligned}$$

endlich x_0 eine Wurzel von $R(x) = 0$ bedeutet.

Im Archiv der Mathematik, 3. Reihe, Bd. 1, Seite 118–123, 1901 habe ich gezeigt, daß zwischen den beiden oben niedergeschriebenen Integralen die Beziehung besteht

$$\text{I.} \qquad \int_{x}^{s} \frac{ds}{\sqrt{S}} = 2 \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

daß man also durch die Substitution (1.) direkt von der linken Seite der vorstehenden Integralgleichung zur rechten übergehen kann. Aber es ist meines Wissens bisher noch nicht aufgezeigt, wie man von der rechten zur linken Seite gelangt, was doch das wichtigere ist. Der Lösung dieser Aufgabe gelten die nachstehenden Entwicklungen. Ich schicke folgende Notiz voraus.

§ 1.

Ist die Gleichung 4. Grades

a) $$\alpha_0 x^4 + 4\alpha_1 x^3 + 6\alpha_2 x^2 + 4\alpha_3 x + \alpha_4 = 0$$

gegeben, so wird sie durch

b) $$x = \xi - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}$$

reduziert auf

c) $$\alpha_0^4 \xi^4 + 6\alpha_0^2(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2)\xi^2 + 4\alpha_0(\alpha_0^2\alpha_3 - 3\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3)\xi + (\alpha_0^3\alpha_4 - 4\alpha_0^2\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_0\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4) = 0.$$

Es hat aber die Gleichung

d) $$y^4 + ay^2 + by + c = 0$$

die *Euler*sche Resolvente

e) $$z^3 + 2az^2 + (a^2 - 4c)z - b^2 = 0,$$

die hier also lautet:

f) $$\alpha_0^6 z^3 + 12\alpha_0^4(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2)z^2 + 4\alpha_0^2(9\alpha_0^2\alpha_2^2 - 24\alpha_0\alpha_1^2\alpha_2 + 12\alpha_1^4 + 4\alpha_0^2\alpha_1\alpha_3 - \alpha_0^3\alpha_4)z - 16(\alpha_0^2\alpha_3 - 3\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3)^2 = 0.$$

Wir reduzieren dieselbe durch die Substitution:

g) $$z = -\frac{4\sigma}{\alpha_0} - \frac{4(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2)}{\alpha_0^2}$$

auf

j) $$4\sigma^3 - G_2\sigma - G_3 = 0$$

mit den Wurzeln $\sigma = E_1, E_2, E_3$ und den Koeffizienten

k) $$G_2 = \alpha_0\alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 3\alpha_2^2,$$
$$G_3 = \alpha_0\alpha_2\alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_0\alpha_3^2 - \alpha_1^2\alpha_4 - \alpha_2^3.$$

§ 2.

Die Aufgabe, die wir uns gestellt haben, ist also einfach die, die Gleichung (1.) oder

(1.) $$sR(x) + h(x) = 0$$

nach x aufzulösen, und zwar ist mit Rücksicht auf § 1, a,:

(3.)
$$\alpha_0 = a_0a_2 - a_1^2 + a_0s,$$
$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(a_0a_3 - a_1a_2) + a_1s,$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{6}(a_0a_4 + 2a_1a_3 - 3a_2^2) + a_2s,$$
$$\alpha_3 = \frac{1}{2}(a_1a_4 - a_2a_3) + a_3s,$$
$$\alpha_4 = a_2a_4 - a_3^2 + a_4s.$$

Daraus folgt nach § 1, k,

(4.)
$$G_2 = g_2s^2 + 3g_3s + \frac{1}{12}g_2^2,$$
$$G_3 = g_3s^3 + \frac{1}{6}g_2^2s^2 + \frac{1}{4}g_2g_3s + \frac{1}{216}(54g_3^2 - g_2^3),$$

so daß also zuerst die Gleichung

(5.) $$4\sigma^3 - G_2\sigma - G_3 = 0$$

zu lösen wäre. Beachtet man die Beziehungen, die zwischen den Wurzeln

e_1, e_2, e_3 und den Koeffizienten g_2 und g_3 bestehen, so findet man, daß die Gleichung (5.) *drei rationale Wurzeln* hat, welche lauten:

$$E_1 = e_1 s + e_2 e_3 + \frac{g_2}{12},$$

$$E_2 = e_2 s + e_3 e_1 + \frac{g_2}{12}, \tag{6.}$$

$$E_3 = e_3 s + e_1 e_2 + \frac{g_2}{12}.$$

Damit sind aber für die Resolvente § 1, f, die drei Wurzeln z_1, z_2, z_3 gefunden. Setzt man nämlich in § 1, g, für $\sigma = E_\lambda$ und α_λ die Werte aus (6.) und (3.) ein, so erhält man

$$z_1 = \frac{4(a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 e_1)(s - e_2)(s - e_3)}{(a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 s)^2},$$

$$z_2 = \frac{4(a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 e_2)(s - e_3)(s - e_1)}{(a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 s)^2}, \tag{7.}$$

$$z_3 = \frac{4(a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 e_3)(s - e_1)(s - e_2)}{(a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 s)^2}.$$

Wird die Gleichung (1.) durch die Substitution

$$x = \frac{a_0 a_3 - a_1 a_2 + 2 a_1 s}{2(a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 s)} + \xi \tag{8.}$$

(§ 1, b) reduziert auf die Gleichung § 1, c, so ergibt sich in bekannter Weise

$$\pm \xi_1 = \frac{1}{2}(-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}),$$

$$\pm \xi_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}),$$

$$\pm \xi_3 = \frac{1}{2}(+\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}), \tag{9.}$$

$$\pm \xi_4 = \frac{1}{2}(+\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}),$$

und zwar ist das obere oder das untere Vorzeichen zu nehmen, je nachdem

(10.) $$(a_0 a_2 - a_1^2 + a_0 s)(a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3)(4 s^3 - g_2 s - g_3)$$

größer oder kleiner als Null ist. Die Systeme (7.), (8.) und (9.) ergeben uns demnach x als Funktion von s, und damit ist die gestellte Aufgabe gelöst.

§ 3.

Zum Schluß behandeln wir noch einen besonderen Fall, der auf ein interessantes Formelsystem aus der *Weierstraß*schen Theorie der elliptischen Funktionen führt. Es sei

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -\frac{g_2}{4}, \; a_4 = -g_3,$$

also

$$R(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

Die Gleichung (1.) heißt alsdann

(1′.) $$s = \frac{\left(x^2 + \frac{g_2}{4}\right)^2 + 2 g_3 x}{4x^3 - g_2 x - g_3}$$

und es ist

(3′.) $$\alpha_0 = -1, \alpha_1 = s, \alpha_2 = -\frac{g_2}{12}, \; \alpha_3 = -\frac{g_2}{4} s - \frac{g_3}{2}, \; \alpha_4 = -g_3 s - \frac{g_2^2}{16}.$$

Die Beziehung I. vereinfacht sich zu

I′. $$\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = 2 \int_{e_\lambda}^{x} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}};$$

sie besagt, daß für $s = \wp(2u)$ die Größe $x = \wp(u)$ ist; in dieser Bedeutung ist ja die Gleichung (1′.) aus der *Weierstraß*schen Theorie der elliptischen Funktionen bekannt. Die Gleichungssysteme (4.), (5.) und (6.) des § 2 bleiben ungeändert; aber es lautet:

(7′.) $$\begin{aligned} z_1 &= 4(s - e_2)(s - e_3), \\ z_2 &= 4(s - e_3)(s - e_1), \\ z_3 &= 4(s - e_1)(s - e_2); \end{aligned}$$

(8′.) $$x = s + \xi,$$

und man erhält, wenn man

(10′.) $$-2(4s^3 - g_2 s - g_3) < 0,$$

also *negativ* annimmt, und beachtet, daß $x = \wp(u)$, $\wp(u+\omega')$, $\wp(u+\omega)$ oder auch $\wp(u+\omega+\omega')$ sein kann:

II.
$$\begin{aligned}
\wp u &= \wp 2u + \sqrt{(\wp 2u - e_1)(\wp 2u - e_2)} \\
&\quad + \sqrt{(\wp 2u - e_2)(\wp 2u - e_3)} + \sqrt{(\wp 2u - e_3)(\wp 2u - e_1)}; \\
\wp(u+\omega') &= \wp 2u + \sqrt{(\wp 2u - e_1)(\wp 2u - e_2)} \\
&\quad - \sqrt{(\wp 2u - e_2)(\wp 2u - e_3)} - \sqrt{(\wp 2u - e_3)(\wp 2u - e_1)}; \\
\wp(u+\omega) &= \wp 2u - \sqrt{(\wp 2u - e_1)(\wp 2u - e_2)} \\
&\quad + \sqrt{(\wp 2u - e_2)(\wp 2u - e_3)} - \sqrt{(\wp 2u - e_3)(\wp 2u - e_1)}; \\
\wp(u+\omega+\omega') &= \wp 2u - \sqrt{(\wp 2u - e_1)(\wp 2u - e_2)} \\
&\quad - \sqrt{(\wp 2u - e_2)(\wp 2u - e_3)} + \sqrt{(\wp 2u - e_3)(\wp 2u - e_1)}.
\end{aligned}$$

Berichtigung zu der Arbeit von Herrn Sturm in Bd. 134.

S. 289 Z. 4 v. o. muß stehen P_{22} statt P_{13}.
S. 293 Z. 18 v. u. muß stehen 3_n^2-ter statt 3_n^2.
S. 293 Z. 5 v. u. ist P hinter Doppelpunkte überflüssig.

Kettentheorie und Wohlordnung.

Von Herrn *Gerhard Hessenberg* in Bonn.

Einleitung. — I. Die Grundbeziehungen §§ 1—8. — II. Die Axiome von *Zermelo* §§ 9—22. — III. Funktionen §§ 23—34. — IV. Funktionale Beziehungen §§ 35—45. — V. Monotone Funktionen §§ 46—60 — VI. Distributive Funktionen §§ 61—69. — VII. Aussonderungsfunktionen §§ 70—82. — VIII. Spezielle monotone Funktionen §§ 83—89. — IX. Ketten §§ 90—99. — X. Äquivalente Kettenfunktionen §§ 100—118. — XI. Schnitte durch Subsumption §§ 119—126. — XII. Schnitte aus unsymmetrischen Relationen §§ 127—135. — XIII. Induktionsschlüsse §§ 136—148. — XIV. Der Wohlordnungssatz §§ 149—156.

Einleitung.

Die vorliegenden Untersuchungen sind axiomatischer Art, d. h. sie beschäftigen sich mit der Frage nach der Tragweite der aus den einzelnen Axiomen der Mengenlehre zu ziehenden Folgerungen. Hierbei tritt eine Eigenart der Mengenlehre hervor, durch die sie von der Geometrie und der Analysis scharf unterschieden ist. Während nämlich die „Bereiche“ dieser Wissenschaften im Sinne der Mengenlehre selbst *Mengen* sind, ist der „*Bereich der Dinge*“, von dem die Mengenlehre handelt, selbst keine Menge mehr, was in den bekannten Paradoxien zum Ausdruck kommt. Diese sind durch die von Herrn *Zermelo* angegebenen Axiome*) ausgeschaltet; ich gehe daher von diesen Axiomen aus.

Der eigentliche Gegenstand der Untersuchung ist die Theorie der *Ketten*, die zu einer gegebenen Zuordnung gehören. Dieser Theorie geht eine Untersuchung der wichtigsten Zuordnungen voran, unter denen zunächst die „Funktionen“ herausgehoben werden. Sie sind dadurch charakterisiert,

*) *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, im folgenden als „Grdl. d. M.“ zitiert. Math. Ann. Bd. 65. Ferner wird verwiesen auf folgende Arbeiten desselben Verfassers: *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann*, Math. Ann. Bd. 59. *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung.* Math. Ann. Bd. 65.

daß jeder *Menge* von Argumenten eine *Menge* von Funktionswerten entspricht. Dieser Funktionsbegriff ist enger als der der *Zuordnung* und weiter als der der *Belegung*, unter den der Funktionsbegriff der Analysis fällt.

Unter den Funktionen treten wiederum die *monotonen* hervor, welche den Elementen einer Reihe sich gegenseitig umfassender Mengen als Argumenten eine gleichartige Reihe von Werten zuordnen. Entsprechend dem üblichen Unterschied monoton fallender oder wachsender Funktionen werden „*antitone*“ und „*homöotone*“ Funktionen unterschieden, wobei von den letzteren noch eine Reihe wichtiger Spezialfälle hervortreten.

Die Kette wird definiert als ein Argument einer homöotonen Funktion, das seinen zugehörigen Funktionswert umfaßt. Unter diesen Begriff fallen alle bisher betrachteten Ketten, soweit sie aus einer *gegebenen* Zuordnung konstruiert werden*). Der *Durchschnittssatz*, wonach der „*Durchschnitt*“ oder größte gemeinsame Bestandteil von Ketten derselben Zuordnung wieder eine Kette ist, folgt fast unmittelbar aus unserer Definition. Aus ihm ergibt sich die Existenz der *kleinsten* Kette, wobei die axiomatischen Einschränkungen der zulässigen Schlußweisen erschwerend hervortreten.

Es erweisen sich die Reste und Abschnitte einer geordneten Menge als Ketten; dadurch wird der *Dedekind*sche Satz von der Lückenlosigkeit der Menge der Schnitte eine unmittelbare Folge des Durchschnittssatzes. In den der Form und dem Inhalte nach so sehr verschiedenen Arbeiten: „*Was sind und was sollen die Zahlen*“ und „*Stetigkeit und irrationale Zahlen*“ leitet also ein gemeinsamer Grundgedanke die Betrachtungen. Denn in der erstgenannten wird auch die vollständige Induktion auf den Durchschnittssatz zurückgeführt. Angesichts der Anfechtungen, die dieser Satz erfahren hat**), ist es interessant, zu sehen, daß nicht nur der Schluß von n auf $n+1$, sondern auch die Stetigkeit des Kontinuums auf ihn zurückgeht.

Die Konstruktion der kleinsten Kette, die eine gegebene Menge α umfaßt, führt unmittelbar in die Theorie der Wohlordnung hinein; die Betrachtungen, die dadurch veranlaßt werden, erweisen sich als eine Verallgemeinerung des Kettenschlusses in dem zweiten *Zermelo*schen Beweis des Wohlordnungssatzes.

---

*) Der Begriff der „endlichen Kette“, den Herr *Zermelo* in seinem Vortrag auf dem Kongreß in Rom aufgestellt hat, fällt anscheinend nicht unter den hier zugrunde gelegten.

**) Vergl. z. B. *Zermelo*, Neuer Beweis usw., § 2 b: Einwand der nicht-prädikativen Definition, wo diese Angriffe zurückgewiesen werden.

Noch einige Anmerkungen zu dem formalen Apparat seien hier angebracht. Ein zweckmäßiger Formalismus kann sich naturgemäß nur an komplizierteren Fragen bewähren; für die Anfänge wird er meist zu umfangreich sein und gegenüber dem gegenständlichen Denken wenig Erleichterung geben. In der Einführung neuer Symbole habe ich mich daher größter Zurückhaltung befleißigt*). Daß trotzdem der formale Apparat recht umfangreich ausgefallen ist, liegt zum Teil vielleicht gerade an dieser Zurückhaltung. Eine Erweiterung der Symbolik wird jedenfalls viele Ausdrücke erheblich vereinfachen. Sodann aber habe ich größte Allgemeinheit angestrebt, und darum sind aus Gründen der Vollständigkeit zahlreiche Beziehungen aufgestellt, auf die im weiteren Verlauf nicht zurückgegriffen wird. Ebenso sind Eigenschaften besonderer Funktionen, wenn sie allgemeinere Geltung haben, zunächst für den weitesten mir bekannten Umfang abgeleitet, so daß sie an der Stelle, an der auf sie Bezug genommen wird, durch Spezialisierung erhalten werden. Beispielsweise fließen fast die meisten Eigenschaften der Symbole $\mathfrak{S}$ (Vereinigungsmenge) und $\mathfrak{U}$ (Potenzmenge) aus der Homöotonie der zugehörigen Funktionen, unter anderen z. B. die Tatsache, daß diese Zuordnungen überhaupt Funktionen sind. Nur an der Allgemeinheit ihrer Anwendbarkeit läßt sich ja die Zweckmäßigkeit einer Symbolik beurteilen; daß die hier gebrauchte für die wichtigsten Tatsachen stets einen kurzen und naturgemäßen Ausdruck gibt, mußte daher überall gezeigt werden.

I. *Die Grundbeziehungen.*

1. Die erste Grundbeziehung, von rein logischer Art,

$$a = b \ (a \textit{ gleich } b)$$

ist die der Identität. Sie äußert sich formal darin, daß jede für a gültige Aussage auch für b gilt.

2. Die zweite, für die Mengenlehre charakteristische Beziehung wird mit den Worten ausgesprochen: „*a ist Element von α*“, „*a ist in α enthalten*“ oder „*α enthält a*“; in Zeichen

$$a \in \alpha, (a \text{ „}in\text{“ } \alpha).$$

*) Vor allem habe ich alle begriffsschriftlichen Mittel vermieden.

Diese Beziehung ist nicht transitiv, d. h. aus $a \varepsilon \alpha \varepsilon A$ braucht nicht $a \varepsilon A$ zu folgen. Wenn ein Ding α andere Dinge enthält, so wird es eine „*Menge*“ genannt, und zwar eine „*eigentliche*“ Menge im Gegensatz zur leeren oder Nullmenge (§ 11.).

3. Es ist für das Verständnis des Kalküls erleichternd, wenn wir noch folgende formale Festsetzungen treffen: Wenn über die Elemente einer Menge keine weiteren Voraussetzungen vorliegen, so heißt die Menge von „*erster Stufe*“. Wird verlangt, daß die Elemente einer Menge selbst Mengen sein sollen, so wird die Menge als Menge „*zweiter Stufe*“ bezeichnet. Sollen die Elemente Mengen zweiter Stufe sein, so ist die Menge eine Menge „*dritter Stufe*“.

Dinge, die keine Mengen zu sein brauchen, bezeichnen wir mit kleinen lateinischen, Mengen erster Stufe mit kleinen griechischen, solche zweiter Stufe mit großen lateinischen und solche dritter Stufe mit großen griechischen Buchstaben.

Diese Unterscheidung ist ohne prinzipielle Bedeutung. Die Stufe einer Menge kann sogar unbestimmt sein. Die Aussage, daß α von erster Stufe sei, soll nicht ausschließen, daß die Elemente von α selbst Mengen sind; sie bringt nur zum Ausdruck, daß derartiges nicht vorausgesetzt wird. Jede Stufe schließt also die folgenden ein, wie ja schon die Gesamtheit der Dinge die der Mengen einschließt.

Da aber gewisse „*Funktionen*“ erst von einer bestimmten Stufe an definiert sind, ist es bequem, sich durch die Bezeichnung dauernd an eine derartige Voraussetzung zu erinnern. Zugleich gewährt dies einen gewissen Schutz gegen die bei rein formalen Operationen vorhandene Gefahr, daß man das Sinnloswerden eines Ausdrucks übersieht.

4. Die dritte Grundbeziehung hat nur zwischen Mengen statt und besteht darin, daß jedes Element von β auch Element von α ist. Wir sagen: „α *umfaßt* β“, „β *wird von* α *umfaßt*“, „β *ist Untermenge von* α“, „α *ist Übermenge von* β“; in Zeichen:

$$\beta \Subset \alpha^{*}) \quad (\beta \text{ „}sub\text{“ } \alpha).$$

---

*) Das Subsumptionszeichen $\Subset$ ist von *Schröder* eingeführt und neuerdings wieder von *Zermelo* angewandt worden.

Diese Beziehung der „*Subsumption*“ ist transitiv, d. h. aus

$$\gamma \Subset \beta \Subset \alpha$$

folgt

$$\gamma \Subset \alpha.$$

Ferner folgt aus $a \varepsilon \beta \Subset \alpha$: $a \varepsilon \alpha$, und die Zulässigkeit dieses Schlusses ist der Inhalt der Aussage $\beta \Subset \alpha$. Es ist stets $\alpha \Subset \alpha$.

5. Die Beziehungen ε und $\Subset$ müssen sorgfältig geschieden werden. Ihre Verwechslung läßt sich in der formalen Logik wiederholt feststellen und hat ganze philosophische „*Systeme*“ beeinflußt. Begünstigt wird sie durch den Sprachgebrauch, der die Worte „*enthalten*“ und „*umfassen*“ synonym verwendet. Ich werde im folgenden den Sinn dieser Worte scharf trennen: die Menge *enthält* ihre *Elemente* und *umfaßt* ihre *Untermengen*.

Wenn eine Menge ξ nur ein einziges Element x enthält, so sind die Aussagen $\xi \Subset \alpha$ und $x \varepsilon \alpha$ gleichbedeutend. Daher sind auch ξ und x sorgfältig voneinander zu scheiden. In der Tat führt die Gleichsetzung des Dinges x mit derjenigen Menge ξ, die x als einziges Element besitzt, unmittelbar zur Gleichsetzung irgend zweier Dinge.

6. Auf Grund des Axioms der Elementarmengen (§ 11) gibt es zu jedem Ding x eine Menge $\mathfrak{E}x$, die x und nur x enthält. Die Aussage $x \varepsilon \alpha$ läßt sich daher stets durch eine Subsumption: $\mathfrak{E}x \Subset \alpha$, und die Aussage $x = y$ durch $x \varepsilon \mathfrak{E}y$, d. h. $\mathfrak{E}x \Subset \mathfrak{E}y$ ersetzen. Es hat nun von irgend zwei Mengen α, β stets als „*definit*“ zu gelten*), ob $\alpha \Subset \beta$ ist. Es ist daher von einem Ding x und einer Menge α stets definit, ob $x \varepsilon \alpha$, und von zwei Dingen x, y, ob $x = y$ ist, oder nicht.

7. Wenn $\beta \Subset \alpha$ ist, so sagen wir, α sei „*im Sinne der Subsumption größer*“ als β. Wo Mißverständnisse ausgeschlossen sind, kann auch der Zusatz „*im Sinne der Subsumption*“ fortfallen. Ist z. B. in einer Menge A zweiter Stufe ein Element α enthalten, welches alle Elemente von A umfaßt, so gilt es als „*größtes*“ Element von A. Ein Element β von A, welches von allen andern umfaßt wird, ist „*kleinstes*“ Element von A. Nach dem „*Axiom der Bestimmtheit*“ (§ 9) kann es nur *ein* kleinstes und nur *ein* größtes Element in A geben.

---

*) Eine Aussage heißt nach *Zermelo* „*definit*“, wenn über ihre Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbeziehungen des Bereiches vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze ohne Willkür entscheiden. Grundl. d. M. S. 263.

8. Wenn zwischen je zwei Elementen von A eine der Beziehungen $\alpha \subseteqq \beta$, $\beta \subseteqq \alpha$ besteht, so sagen wir, A sei *„durch Subsumption geordnet“*. Im Sinne solcher Ordnung können größte und kleinste Elemente auch als *„erste“* oder *„letzte“* bezeichnet werden, doch hängt der Sinn dieser Bezeichnung davon ab, daß überhaupt eine Ordnung durch Subsumption vorliegt, und ferner davon, ob das *„größere“* oder *„kleinere“* Element als das *„vorangehende“* gedacht wird.

II. *Die Axiome von Zermelo.*

9. *Axiom der Bestimmtheit: Aus* $\alpha \subseteqq \beta$ *und* $\beta \subseteqq \alpha$ *folgt* $\beta = \alpha$. In Worten: *Eine Menge ist durch ihre Elemente bestimmt.*

Es ist wichtig zu beachten, daß hiermit keine independente Mengendefinition zugelassen wird. Das Axiom besagt nur: Existiert *überhaupt* eine Menge α, welche alle Elemente einer Gesamtheit und nur diese enthält, so existiert auch *nur eine* solche Menge. Ob aber eine solche Menge existiert, darüber sagt das Axiom nichts aus.

10. Sind $a, b, c, \ldots$ die Elemente von α, so bezeichnen wir α mit $\{a, b, c, \ldots\}$. Die geschweifte Klammer hat hierin den Sinn eines Funktionszeichens. Dies ist wiederum von Bedeutung, wenn $\alpha = \{a\} = \mathfrak{E}a$ nur ein Element enthält. Ist nämlich $\mathfrak{F}$ irgend eine Funktion, so sind $\mathfrak{F}\alpha$ und $\mathfrak{F}\mathfrak{E}a$ Funktionen von gleichem Wert; aber Argumente und Funktionen sind verschieden.

Ganz allgemein ist $\mathfrak{F}\alpha = \mathfrak{F}\{a, b, c, \ldots\}$ zugleich Funktion von $a, b, c, \ldots$, aber eine von $\mathfrak{F}$ verschiedene Funktion, worauf wir im folgenden zu achten haben werden.

11. *Axiom der Elementarmengen: Es gibt eine und nur eine „leere“ oder „uneigentliche“ Menge, die „Nullmenge“ oder „Null“,* 0, *welche kein Element enthält. Es gibt zu jedem Ding a eine Menge**) $\mathfrak{E}a$ *oder* $\{a\}$, *welche nur a, und zu zwei verschiedenen Dingen a, b eine Menge**) $\{a, b\}$, *welche nur diese beiden enthält.*

12. *Axiom des Unendlichen: Es gibt mindestens eine Menge von folgender Beschaffenheit: Sie enthält die Null, und wenn sie a enthält, so enthält sie auch* $\mathfrak{E}a$.

---

*) Nach dem Axiom der Bestimmtheit auch *nur* eine.

13. *Axiom der Aussonderung. Ist die Klassenaussage* $\mathfrak{a}x$ *definit**) *für alle Elemente* x *einer Menge* α, *so gibt es eine Untermenge* $\mathfrak{A}\alpha$ *von* α, *welche alle und nur solche Elemente von* α *enthält, für welche* $\mathfrak{a}x$ *wahr ist.*

Dieses Axiom schränkt die Bildung von *Mengen* aus *Aussagen* derart ein, daß alle üblichen Paradoxien entfallen. Es fordert, kurz gesagt, daß von den, eine Menge definierenden Aussagen jede einzelne definit und mindestens eine von der Form $x \varepsilon \alpha$) sein muß. Die Aussage „*x enthält sich selbst*“ genügt nur der ersten, die Aussage „*x ist eine endlich definierbare Zahl des Kontinuums*“ nur der zweiten Bedingung.**

14. Ist $\beta \overline{\in} \alpha$, so definiert die Aussage: „*x ist nicht in β enthalten*“ eine Untermenge $\alpha - \beta$ von α, die das „*Komplement von β in bezug auf α*“ genannt wird. Das Komplement von α selbst ist die Null, *sie ist also Untermenge jeder Menge.*

Jede von α und 0 verschiedene Untermenge von α wird (nach einem Vorschlag von *Zermelo**)) ein „*Teil*“ von α genannt. Das Komplement eines Teiles ist wieder ein Teil. Die Null und jede Menge der Form $\mathfrak{E}a$ umfaßt keine Teile.**

15. *Axiom der Potenzmenge. Zu jeder Menge α gibt es eine Menge, welche alle Untermengen von α enthält.*

Da es definit ist, ob $\beta \overline{\in} \alpha$, gibt es folglich eine Menge, $\mathfrak{U}\alpha$, die „*Potenzmenge*“ von α, welche *genau* alle Untermengen von α enthält. Die Aussagen:

$$\beta \overline{\in} \alpha \quad \text{und} \quad \beta \varepsilon \mathfrak{U}\alpha$$

sind also gleichbedeutend. $\mathfrak{U}\alpha$ „*enthält*“ jede Menge, die von α „*umfaßt*“ wird, und umgekehrt.

16. Infolgedessen existiert auch zu zwei Mengen α, β stets eine Menge $\mathfrak{U}(\beta, \alpha)$, welche genau alle Mengen γ enthält, für die

$$\beta \overline{\in} \gamma \overline{\in} \alpha$$

gilt. Die Menge $\mathfrak{U}(\beta, \alpha)$ ist leer, wenn β nicht von α umfaßt wird. Ist

---

*) Vgl. § 6, Fußnote.

**) Hierin ist α als logische Konstante zu denken, d. h. es ist für alle x der Aussage dasselbe. In der Aussage $\xi \varepsilon \xi$ ist die rechte Seite nicht konstant.

***) Bisher wurden „Teil“ und „Untermenge“ synonym gebraucht, α war der „unechte“ Teil von α.

dagegen $\beta \notin \alpha$, so ist $\mathfrak{U}(\beta, \alpha)$ niemals leer; selbst wenn $\beta = \alpha$, enthält $\mathfrak{U}(\alpha, \beta)$ das Element α. Wenn $\beta = \alpha = 0$, so ist $\mathfrak{U}(0,0) = \mathfrak{E}0$. Insbesondere ist

$$\mathfrak{U}\alpha = \mathfrak{U}(0, \alpha).$$

17. *Axiom der Vereinigung: Zu jeder Menge A von zweiter Stufe gibt es eine Menge $\mathfrak{S}A$, die „Vereinigung" von A, welche die Elemente der Elemente von A und nur diese enthält.*

$\mathfrak{S}A$ ist die *„kleinste"* gemeinsame Übermenge der Elemente von A. Ist $\mathfrak{S}A$ Element von A, so ist $\mathfrak{S}A$ das *„größte"* Element von A, und gibt es ein größtes Element in A, so ist es gleich $\mathfrak{S}A$.

$\mathfrak{S}0$ wird zweckmäßig als 0 definiert. Denn $x \varepsilon \mathfrak{S}A$ fordert, daß A mindestens ein Element α enthält, welches seinerseits x enthält.

18. Es ist notwendig, $\mathfrak{S}A$ auch als Funktion der Elemente von $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ anzusehen und zu bezeichnen. Wir nennen $\mathfrak{S}A$ die *„Summe von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$"*, in Zeichen:

$$\mathfrak{S}A = \alpha + \beta + \gamma + \cdots.$$

Ich folge hierin der Terminologie von *Zermelo*, mache aber auf die Gefahr einer Verwechslung aufmerksam, die darin liegt, daß das Zeichen $\mathfrak{S}$ des Wortes *„Vereinigung"* dem Wort *„Summe"* entlehnt ist.

19. In weitgehender Analogie zur Vereinigung steht der *„Kern"* einer Menge A von Mengen. Seine Existenz ist aber beweisbar. (Vgl. *Zermelo*, Grdlg. d. M., S. 264.) Der Kern von A enthält alle und nur solche Dinge, die Element *jedes* Elementes von A sind. Als Funktion der Elemente von $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ nennen wir ihn den *„Durchschnitt der Mengen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$"* und bezeichnen ihn mit $\mathfrak{D}A$ oder mit $[\alpha, \beta, \gamma, \ldots]$.*)

$\mathfrak{D}A$ ist *„größte"* gemeinsame Untermenge aller Elemente von A. Ist $\mathfrak{D}A \varepsilon A$, so ist $\mathfrak{D}A$ *„kleinstes" Element* von A, und enthält A ein *„kleinstes"* Element, so ist dieses gleich $\mathfrak{D}A$.

---

*) *Zermelo* sagt statt „Kern von A": *„der zu A gehörige Durchschnitt"*. Die Unterscheidung des Durchschnittes *„der Mengen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$"* und des *„zur Menge $\{\alpha, \beta, \gamma \ldots\}$ gehörigen"* Durchschnittes ist aber sprachlich so außerordentlich fein, daß ihre konsequente Durchführung wohl kaum einzuhalten sein wird, wiewohl dies bei *Zermelo* zutrifft. Ich versuche daher hier mit *zwei* Worten, *„Kern"* und *„Durchschnitt"*, den Doppelsinn wiederzugeben. Wie nötig gerade hier die Trennung ist, mag ein Hinweis auf § 74 zeigen, wo sich Kern und Durchschnitt als Funktionen völlig entgegengesetzten Charakters erweisen.

20. Für eine leere Menge ist der Kern nicht definiert. Wir setzen zur Ergänzung

$$\mathfrak{D}0 = 0.$$

Die zahlreichen Ausnahmen, die aus dieser Festsetzung folgen, lassen es aber fraglich erscheinen, ob sie gegenüber einem völligen Verzicht auf die Definition von $\mathfrak{D}0$ einen Fortschritt bedeutet. Sie ist auch nicht so leicht zu rechtfertigen, wie die analoge Definition von $\mathfrak{S}0$. Denn aus der Aussage, daß *alle* Elemente von A eine gewisse Eigenschaft besitzen sollen (hier die, x zu enthalten, wenn $x \varepsilon \mathfrak{D}A$), läßt sich nicht schließen, daß A Elemente enthält. Wohl aber ist dieser Schluß zulässig, wenn *mindestens ein* Element von A eine gewisse Eigenschaft besitzen soll*). (Wenn $\mathfrak{S}A$ nicht leer ist, kann A nicht leer sein, da $x \varepsilon \mathfrak{S}A$ verlangt, daß x in *mindestens* einem Element von A enthalten sein soll.) Es ließe sich sogar formallogisch rechtfertigen, wenn wir unter $\mathfrak{D}0$ den Bereich *aller* Dinge verständen. Dem steht lediglich im Wege, daß dieser keine Menge, auch kein Ding ist, und daß für unsere Zwecke ein Funktionswert, der kein Ding ist, wertlos ist. Eine solche Festsetzung scheint daher bis auf weiteres noch schlechter, als der Verzicht auf eine Definition von $\mathfrak{D}0$.

21. Wenn der Durchschnitt zweier Mengen α, β leer ist, so nennen wir α, β *„elementenfremd“*. Eine Menge A von Mengen, von denen je zwei elementenfremd sind, wird eine *„Zerlegung der Menge* $\mathfrak{S}A$“ genannt. Jedes Element von $\mathfrak{S}A$ ist in genau einem Elemente von A enthalten. Eine Zerlegung heißt *„echt“* oder *„eigentlich“*, wenn sie die Null nicht enthält. $\{\alpha, 0\}$ ist eine unechte Zerlegung von α. Es gilt nun das *Axiom der Auswahl: Ist A eine echte Zerlegung von $\mathfrak{S}A$, so gibt es mindestens eine Menge μ, welche mit jedem Element von A genau ein Element gemein hat.*

22. Von diesen Axiomen, die bei *Zermelo* in anderer Reihenfolge genannt sind, geben die beiden ersten (Bestimmtheit und Aussonderung) eine Einschränkung und scharfe Abgrenzung derjenigen Methoden, vermittelst

*) Diese Tatsache, daß das partikuläre Urteil in gewisser Hinsicht *mehr* fordert, als das allgemeine, wird in den landläufigen Darstellungen der formalen Logik konsequent übersehen. Aus dem Urteil *„alle S sind P“* kann *nicht* gefolgert werden, — entgegen der allgemeinen Ansicht, — daß *„einige P S sind“*. Es muß erst feststehen, daß es überhaupt einige S gibt. Dagegen ist das Urteil *„einige S sind P“* ohne weiteres in *„einige P sind S“* umkehrbar.

deren man bisher independente Definitionen gebildet hat. Die Axiome der Elementarmengen und des Unendlichen sichern die einfachsten Fälle endlicher und unendlicher Mengen, die Axiome der Potenzmenge und der Vereinigung gestatten sodann, zu allen endlichen und unendlichen Mächtigkeiten aufzusteigen. Die Bedeutung des Auswahlaxioms für die Disjunktion zwischen endlichen und unendlichen Mengen und für die Komparabilität unendlicher Mengen ist durch die Diskussion über den *Zermelo*schen Wohlordnungssatz hinreichend klargestellt und bekannt geworden. In unseren Entwicklungen wird von den Axiomen des Unendlichen und der Auswahl kein Gebrauch gemacht, doch beruhen natürlich einzelne Beispiele auf ihnen.

III. *Funktionen.*

23. „Die Entwicklung der Mengenlehre hat ihre Quelle in dem Bestreben, für zwei grundlegende mathematische Begriffe eine klärende Analyse zu schaffen, nämlich für die Begriffe des *Argumentes* und der *Funktion*“.*) In der Tat erscheint die Funktion in der Mengenlehre als „*Belegung*“, und diese in der Darstellung *Zermelo*s selbst als *Menge*. (Man vergl. z. B. § 2 der Grdlg. d. M., Theorie der Äquivalenz, wo die eindeutige Abbildung von M auf N als Untermenge von MN definiert wird.)

Der allgemeine Begriff der Zuordnung geht aber nunmehr, nachdem wir den Mengenbegriff axiomatisch eingeschränkt haben, über den Begriff der Belegung hinaus und tritt wieder selbständig neben den Begriff der Menge, sowie wir den Versuch unternehmen, die Eigenschaften der Symbole $\mathfrak{E}, \mathfrak{S}, \mathfrak{U}, \mathfrak{D}$ aus allgemeinen Gesichtspunkten zu untersuchen. Dieser Versuch wiederum drängt sich auf, sowie wir bei inhaltlich verschiedenen Untersuchungen auf formal gleiche Schlußweisen stoßen, ganz abgesehen davon, daß allgemein das Anwachsen des Untersuchungsmaterials zum Aufsuchen einfacher Formalismen zwingt.

24. Die „Funktion“ $\mathfrak{E}x$ ist definiert für jedes Ding des Bereiches überhaupt und bezeichnet eine eindeutig bestimmte, zu x zugeordnete Menge. Argument von $\mathfrak{U}\alpha$ kann jede Menge sein; der Wert von $\mathfrak{U}\alpha$ ist eine Menge zweiter Stufe. Argument von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{D}$ ist jede Menge zweiter Stufe; der

*) Dies sind die einleitenden Worte des *Schönflies*schen Berichtes über die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. VIII. Heft 2.

Wert ist eine Menge erster Stufe. In keinem dieser Fälle ist der „*Argumentenvorrat*“ eine Menge, ebensowenig der „*Wertevorrat*“. Wohl aber gilt der Satz, daß jeder *Menge* von Argumenten eine *Menge* von Werten entspricht, und diese Eigenschaft wollen wir ganz allgemein von einer Zuordnung verlangen, wenn wir sie als „*Funktion*“ bezeichnen. Hierdurch gelingt es, auch diesen, über den Begriff der Belegung hinausgehenden Funktionsbegriff mit den Mitteln der axiomatisch eingeschränkten Mengenlehre zu beherrschen.

25. Ist $\mathfrak{F}$ eine eindeutige Zuordnung, deren Argumente und Werte im Bereich der „Dinge“ enthalten sind, so nennen wir jede *Menge* von Argumenten ein „*Feld*“ von $\mathfrak{F}$. Die Klasse der Werte von $\mathfrak{F}x$, die den Elementen x eines Feldes α entsprechen, wird als das „*Bild*“ von α mit $\mathfrak{F}_1\alpha$ bezeichnet. Die Forderung, daß $\mathfrak{F}$ eine Funktion sei, läuft darauf hinaus, daß der Wert von $\mathfrak{F}_1\alpha$ für jedes Feld α von $\mathfrak{F}$ eine *Menge* sein soll.

26. Die einfachste Zuordnung ist die identische, die wir mit $\mathfrak{J}$ bezeichnen. Für jedes Ding x ist $\mathfrak{J}x = x$. Daraus folgt sofort, daß $\mathfrak{J}_1\alpha = \alpha$, d. h. das Bild dem Felde gleich ist. *Die Zuordnung* $\mathfrak{J}$ *ist also eine Funktion, und insbesondere ist* $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}$.

27. In allen anderen Fällen muß der Nachweis des Funktionscharakters einer Zuordnung $\mathfrak{F}$ auf folgendem, aus dem Aussonderungsaxiom sofort zu erkennendem Wege geführt werden: Es ist von jedem Dinge x definit, ob es ein zu einem gegebenen Feld α von $\mathfrak{F}$ gehöriger „*Funktionswert*“ ist. Ist nämlich $a \varepsilon \alpha$, so ist es definit, ob $\mathfrak{F}a = x$ ist oder nicht. Alle Elemente a von α, für die $\mathfrak{F}a = x$ ist, bilden daher eine Untermenge α' von α, und es ist definit, ob $\alpha' = 0$ ist oder nicht. Im ersten Falle ist x nicht von der Form $\mathfrak{F}a, a \varepsilon \alpha$, im zweiten Falle dagegen gibt es mindestens ein $a \varepsilon \alpha$, so daß $\mathfrak{F}a = x$ wird.

Der Nachweis, daß $\mathfrak{F}_1\alpha$ eine Menge ist, hängt also an der Frage, ob es gelingt, eine Menge $\mathfrak{M}\alpha$ anzugeben, die jeden Wert $\mathfrak{F}a$, $a \varepsilon \alpha$ enthält: *Gibt es zu jedem Feld* α *von* $\mathfrak{F}$ *eine Menge* $\mathfrak{M}\alpha$, *so daß aus* $a \varepsilon \alpha$ *stets* $\mathfrak{F}a \varepsilon \mathfrak{M}\alpha$ *folgt, so ist* $\mathfrak{F}$ *eine Funktion.*

28. Wir sahen, daß die Aussagen $a \varepsilon \alpha$ und $\mathfrak{E}a \neq \alpha$ gleichwertig sind. Für die zweite kann aber noch geschrieben werden $\mathfrak{E}a \varepsilon \mathfrak{U}\alpha$. *Demnach ist* $\mathfrak{E}$ *eine Funktion.*

29. Wenn die Zuordnung $\mathfrak{G}$ für alle Argumente von $\mathfrak{F}$ definiert ist und wenn für jedes Argument stets

$$\mathfrak{F}x \Subset \mathfrak{G}x$$

ist, so soll $\mathfrak{G}$ eine „*Majorante*“ von $\mathfrak{F}$ genannt werden. Diese Beziehung setzt voraus, daß die Werte von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ Mengen sind. Wissen wir alsdann, daß $\mathfrak{G}$ eine *Funktion* ist, so läßt sich das gleiche für $\mathfrak{F}$ beweisen.

Ist nämlich α ein Feld, so ist $\mathfrak{G}_1\alpha$ eine Menge, und zwar von zweiter Stufe. Es existiert daher $\mathfrak{S}\mathfrak{G}_1\alpha$, und es ist für jedes $a \,\varepsilon\, \alpha$: $\mathfrak{G}a \Subset \mathfrak{S}\mathfrak{G}_1\alpha$, daher auch $\mathfrak{F}a \Subset \mathfrak{S}\mathfrak{G}_1\alpha$, wofür wir $\mathfrak{F}a \,\varepsilon\, \mathfrak{U}\mathfrak{S}\mathfrak{G}_1\alpha$ schreiben können. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{F}_1\alpha$ eine Menge ist, und zwar ist $\mathfrak{U}\mathfrak{S}\mathfrak{G}_1\alpha$ Majorante von $\mathfrak{F}_1\alpha$.

30. Für jedes Element α von A ist $\mathfrak{D}A \Subset \alpha \Subset \mathfrak{S}A$. Auch $\mathfrak{D}0 \Subset \mathfrak{S}0$ gilt. Es ist also $\mathfrak{S}$ Majorante von $\mathfrak{D}$, und mit dem Nachweis, daß $\mathfrak{S}$ eine Funktion ist, ist der gleiche Nachweis für $\mathfrak{D}$ erbracht.

31. Besonders einfach ist der Nachweis des Funktionscharakters für diejenigen Zuordnungen zu führen, die wir im fünften Kapitel als „*homöoton*“ eingehender untersuchen werden. Eine homöotone Zuordnung $\mathfrak{F}$ besitzt folgende Eigenschaften:

Ihre Argumente und Werte sind Mengen. Ist $\alpha \Subset \beta$, so ist auch $\mathfrak{F}\alpha \Subset \mathfrak{F}\beta$. Ist A ein Feld von $\mathfrak{F}$, so ist $\mathfrak{S}A$ ein Argument von $\mathfrak{F}$.

Aus $\alpha \,\varepsilon\, A$ folgt sukzessive: $\alpha \Subset \mathfrak{S}A$, $\mathfrak{F}\alpha \Subset \mathfrak{F}\mathfrak{S}A$, $\mathfrak{F}\alpha \,\varepsilon\, \mathfrak{U}\mathfrak{F}\mathfrak{S}A$. Die Elemente des Bildes von A sind also alle in der Menge $\mathfrak{U}\mathfrak{F}\mathfrak{S}A$ enthalten, d. h. $\mathfrak{F}$ ist eine Funktion und $\mathfrak{U}\mathfrak{F}\mathfrak{S}$ ist Majorante von $\mathfrak{F}_1$.

Die Zuordnungen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{S}$ sind homöoton; der Nachweis kann als trivial übergangen werden. Sie sind also Funktionen.

32. Ist $\mathfrak{F}$ irgend eine Funktion, so ist die Zuordnung $\mathfrak{F}_1$ homöoton. Ist nämlich A ein Feld von $\mathfrak{F}_1$, so ist jedes $\alpha \,\varepsilon\, A$ Argument von $\mathfrak{F}_1$, d. h. Feld von $\mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}a$ ist also definiert für jedes Element a jedes Elementes α von A, d. h. für jedes Element von $\mathfrak{S}A$. Daher ist $\mathfrak{S}A$ Feld von $\mathfrak{F}$ und Argument von $\mathfrak{F}_1$.

Ist ferner β Argument von $\mathfrak{F}_1$, d. h. Feld von $\mathfrak{F}$, und $\alpha \Subset \beta$, so ist auch α Feld von $\mathfrak{F}$, und es ist offenbar $\mathfrak{F}_1\alpha \Subset \mathfrak{F}_1\beta$. $\mathfrak{F}_1$ ist also homöoton und darum eine Funktion.

Wir nennen daher künftig $\mathfrak{F}_1$ die „*Bildfunktion*“ von $\mathfrak{F}$. Die Bildfunktion $\mathfrak{F}_{11}$ von $\mathfrak{F}_1$ bezeichnen wir kürzer mit $\mathfrak{F}_2$, die von $\mathfrak{F}_2$ mit $\mathfrak{F}_3$ u. s. f.

33. Sind $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ zwei Zuordnungen, so wird jedem Argument x von $\mathfrak{G}$, für das $\mathfrak{G}x$ Argument von $\mathfrak{F}$ ist, ein Ding $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}x)$ zugeordnet. Diese

neue Zuordnung bezeichnen wir mit $\mathfrak{FG}$. Sind $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ Funktionen, so ist auch $\mathfrak{FG}$ eine Funktion. Denn ein Feld α von $\mathfrak{FG}$ muß Feld von $\mathfrak{G}$ sein. Daher ist $\mathfrak{G}_1\alpha$ eine Menge und Feld von $\mathfrak{F}$, da $\mathfrak{F}$ für jedes $\mathfrak{G}x$, $x \varepsilon \alpha$ definiert sein muß, sofern α Feld von $\mathfrak{FG}$ sein soll. Daher ist auch $\mathfrak{F}_1\mathfrak{G}_1\alpha$ eine Menge, und zwar das Bild von α in bezug auf $\mathfrak{FG}$. Wir erkennen dabei, *daß* $\mathfrak{F}_1\mathfrak{G}_1$ *die Bildfunktion von* $\mathfrak{FG}$ *ist,* in Zeichen (symbolisch):

$$(\mathfrak{F}\mathfrak{G})_1 = \mathfrak{F}_1\mathfrak{G}_1.$$

34. Sind die Werte der Zuordnungen $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ Mengen, so wird jedem gemeinsamen Argument x von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ eine Menge $\mathfrak{F}x + \mathfrak{G}x$ zugeordnet. Diese neue Zuordnung bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}+\mathfrak{G}$, also $\mathfrak{F}x+\mathfrak{G}x$ mit $(\mathfrak{F}+\mathfrak{G})x$. Sind $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ Funktionen, so gilt ein gleiches von $\mathfrak{F}+\mathfrak{G}$. Da nämlich $\mathfrak{F}x$ eine Menge und für $x \varepsilon \alpha$: $\mathfrak{F}x \varepsilon \mathfrak{F}_1\alpha$ ist, wird $\mathfrak{F}x \neq \mathfrak{S}\mathfrak{F}_1\alpha$, ebenso $\mathfrak{G}x \neq \mathfrak{S}\mathfrak{G}_1\alpha$, also $\mathfrak{F}x + \mathfrak{G}x \neq \mathfrak{S}\mathfrak{F}_1\alpha + \mathfrak{S}\mathfrak{G}_1\alpha$, d. h. $(\mathfrak{F}+\mathfrak{G})x \varepsilon \mathfrak{U}(\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1\alpha + \mathfrak{S}\mathfrak{G}_1\alpha)$ für jedes $x \varepsilon \alpha$. $(\mathfrak{F}+\mathfrak{G})_1$ besitzt daher die Majorante $\mathfrak{U}(\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{S}\mathfrak{G}_1)$, woraus nach § 27 unsere Behauptung folgt.

IV. *Funktionale Beziehungen.*

35. Da die formale Seite in den folgenden Betrachtungen immer stärker hervortreten wird, möge zunächst eine Zusammenstellung der bisher definierten Symbole und ihrer wichtigsten Eigenschaften gegeben werden.

Definitionen.

I) $y = \mathfrak{J}x$ *bedeutet* $y = x$.

II) $y \varepsilon \mathfrak{E}x$ *bedeutet* $y = x$.

III) $\beta \varepsilon \mathfrak{U}\alpha$ *bedeutet* $\beta \neq \alpha$.

IV) $\gamma \varepsilon \mathfrak{U}(\alpha, \beta)$ *bedeutet* $\alpha \neq \gamma \neq \beta$.

V) $x \varepsilon \mathfrak{S}A$ *bedeutet* $x \varepsilon \alpha \varepsilon A$ *für mindestens ein* α.

VI) $x \varepsilon \mathfrak{D}A$ *bedeutet* $x \varepsilon \alpha$ *für jedes* $\alpha \varepsilon A$.

VII) $x \varepsilon \mathfrak{F}_1\alpha$ *bedeutet* $x = \mathfrak{F}a$, $a \varepsilon \alpha$.

Ergänzungen: $\mathfrak{D}0 = \mathfrak{S}0 = 0$, $\mathfrak{F}_1 0 = 0$.

Folgerungen.

VIIIa) *Aus* $\mathfrak{S}A \neq \beta$, $\alpha \varepsilon A$ *folgt* $\alpha \neq \beta$.

b) **Umkehrung:** *Aus* $\alpha \neq \beta$ *für jedes* $\alpha \varepsilon A$ *folgt* $\mathfrak{S}A \neq \beta$.

c) *Aus* $\beta \neq \alpha$, $\alpha \varepsilon A$ *folgt* $\beta \neq \mathfrak{S}A$, *aus* $\alpha \varepsilon A$ *speziell* $\alpha \neq \mathfrak{S}A$.

d) *Aus* $A \neq B$ *folgt* $\mathfrak{S}A \neq \mathfrak{S}B$.

IXa) *Aus* $\beta \neq \mathfrak{D}A$, $\alpha \varepsilon A$ *folgt* $\beta \neq \alpha$.

b) **Umkehrung:** *Aus* $\beta \neq \alpha$ *für jedes* $\alpha \varepsilon A$ *folgt* $\beta \neq \mathfrak{D}A$.

c) *Aus* $\alpha \neq \beta$, $\alpha \varepsilon A$ *folgt* $\mathfrak{D}A \neq \beta$, *aus* $\alpha \varepsilon A$ *speziell* $\mathfrak{D}A \neq \alpha$.

d) *Aus* $A \neq B$ *folgt* $\mathfrak{D}B \neq \mathfrak{D}A$, *wenn A nicht Null ist.*

Xa)*) *Aus* $\alpha \neq \beta$ *folgt* $\mathfrak{U}\alpha \neq \mathfrak{U}\beta$ *und umgekehrt.*

XI) *Aus* $\alpha \neq \beta$ **folgt** $\mathfrak{F}_1\alpha \neq \mathfrak{F}_1\beta$.

XII) *Aus* $a \varepsilon \alpha$ *folgt* $\mathfrak{F}a \varepsilon \mathfrak{F}_1\alpha$.

36. Anmerkungen sind nur nötig zu IXd und Xa. Die Umkehrung von Xa ist mühelos direkt zu beweisen, sie folgt aber auch aus XVIa (vgl. § 38). In IXd treffen wir auf die Ausnahmestellung der Null für die Funktion $\mathfrak{D}$. Sind $\mathfrak{D}B$ und $\mathfrak{D}A$ beide leer, so ist der Satz trivial. Enthält $\mathfrak{D}B$ ein Element x, so ist $x \varepsilon \alpha$ für jedes $\alpha \varepsilon B$, daher auch $x \varepsilon \alpha$ für jedes $\alpha \varepsilon A$, *sofern es überhaupt Elemente in A gibt.* Alsdann folgt in der Tat $x \varepsilon \mathfrak{D}A$ und damit die Behauptung.

37. Im Folgenden handelt es sich um Beziehungen zwischen Funktionen gleichen Argumentes. In solchen ist es zweckmäßig, das Argument überhaupt fortzulassen und symbolisch $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{G}$ zu schreiben, wenn $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{G}$ identiseh oder $\mathfrak{G}$ Majorante von $\mathfrak{F}$ ist. Man hat alsdann nur beim Wiedereinsetzen von Argumenten darauf zu achten, daß die Ausdrücke nicht sinnlos werden. Wir betrachten z. B. $\mathfrak{S}$ nur als definiert für Mengen zweiter Stufe. Daher ist $\mathfrak{S}\mathfrak{E}$ nur definiert für Argumente, die Mengen sind.

38. XIII) $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{S}$. XIV) $\mathfrak{D}\mathfrak{E} = \mathfrak{S}\mathfrak{E} = \mathfrak{J}$ XV) $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_2$ usf.

XVIa) $\mathfrak{S}\mathfrak{U} = \mathfrak{J}$. XVIIa) $\mathfrak{J} \neq \mathfrak{U}\mathfrak{S}$.

XVIII) $(\mathfrak{F}\mathfrak{G})_1 = \mathfrak{F}_1\mathfrak{G}_1$. XIX) $\mathfrak{S}(\mathfrak{F}+\mathfrak{G})_1 = \mathfrak{S}\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{S}\mathfrak{G}_1$.

XXa) $\mathfrak{S}\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{J}$. XXb) $\mathfrak{F}_1\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\mathfrak{F}$. XXc) $\mathfrak{E}_1 \neq \mathfrak{U}$.

Von besonderer Wichtigkeit ist hier zunächst die Relation XVIa oder $\mathfrak{S}\mathfrak{U}\alpha = \alpha$. Da $\alpha \varepsilon \mathfrak{U}\alpha$ ($\alpha \neq \alpha$, §4), ist nach VIIIc $\alpha \neq \mathfrak{S}\mathfrak{U}\alpha$. Da andererseits

*) In der Bezifferung werden gewisse Analogien zum Ausdruck gebracht werden; daher wird es noch öfter eintreten, daß eine Formel mit N*a*) beziffert wird, während N*b*) erst mehrere Paragraphen später nachfolgt.

aus $\beta \varepsilon \mathfrak{U}\alpha$ stets $\beta \neq \alpha$ folgt (III), ist nach VIIIb: $\mathfrak{S}\mathfrak{U}\alpha \neq \alpha$. So einfach dies (auch ganz direkt) einzusehen ist, so häufig tritt doch dieser Schluß auf, und dementsprechend bequem ist es, ihn rein formal auszuführen. Als Beispiel mag die Umkehrung in Xa dienen. Aus $\mathfrak{U}\alpha \neq \mathfrak{U}\beta$ folgt nach VIIId: $\mathfrak{S}\mathfrak{U}\alpha \neq \mathfrak{S}\mathfrak{U}\beta$, also $\alpha \neq \beta$.

39. $A \neq \mathfrak{U}\mathfrak{S}A$ ergibt sich direkt aus VIIIc.

$x \varepsilon \mathfrak{S}\mathfrak{E}_1\alpha$ bedeutet $x \varepsilon \xi$, $\xi \varepsilon \mathfrak{E}_1\alpha$, letzteres $\xi = \mathfrak{E}y$, $y \varepsilon \alpha$ (V, VII). Hieraus: $x \varepsilon \mathfrak{E}y$, $y \varepsilon \alpha$ und nach II: $x = y \varepsilon \alpha$, d. h. $x \varepsilon \alpha$. Somit ist $\mathfrak{S}\mathfrak{E}_1\alpha \neq \alpha$, und da alle Schritte umkehrbar sind, analog $\alpha \neq \mathfrak{S}\mathfrak{E}_1\alpha$. Auch diese Relation XXa ist noch völlig trivial. Ein gleiches gilt von XXb; XXc ist in § 28 bewiesen.

40. Zum Beweise von XIX schicken wir folgenden allgemeinen Satz voraus:

XXI. *Aus* $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{G}$ *folgt* $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1 \neq \mathfrak{S}\mathfrak{G}_1$ *und* $\mathfrak{D}\mathfrak{F}_1 \neq \mathfrak{D}\mathfrak{G}_1$, *d. h. ist* $\mathfrak{G}$ *Majorante von* $\mathfrak{F}$, *so auch* $\mathfrak{S}\mathfrak{G}_1$ *von* $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1$ *und* $\mathfrak{D}\mathfrak{G}_1$ *von* $\mathfrak{D}\mathfrak{F}_1$.

Wir wir bereits in § 29 sahen, folgt aus $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{G}$: $\mathfrak{F}_1 \neq \mathfrak{U}\mathfrak{S}\mathfrak{G}_1$. Hieraus ergibt sich nach VIIId und XVIa:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1 \neq \mathfrak{S}\mathfrak{U}\mathfrak{S}\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{S}\mathfrak{G}_1, \text{ w. z. b. w.}$$

Weniger einfach, weil nicht soweit vorbereitet, ist der Beweis für den zweiten Teil des Satzes. Für jedes $x \varepsilon \alpha$ gilt:

$$\mathfrak{D}\mathfrak{F}_1\alpha \neq \mathfrak{F}x, \text{ (weil } \mathfrak{F}x \varepsilon \mathfrak{F}_1\alpha, \text{ XII, IXc).}$$

Daher auch $\mathfrak{D}\mathfrak{F}_1\alpha \neq \mathfrak{G}x$ für jedes $x \varepsilon \alpha$, d. h. für jedes $\mathfrak{G}x \varepsilon \mathfrak{G}_1\alpha$ (XII), und nach IXb:

$$\mathfrak{D}\mathfrak{F}_1\alpha \neq \mathfrak{D}\mathfrak{G}_1\alpha.$$

41. In § 34 bewiesen wir:

$$(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_1 \neq \mathfrak{U}(\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{S}\mathfrak{G}_1)$$

und folgern daraus nach VIIId und XVIa:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{F}+\mathfrak{G})_1 \neq \mathfrak{S}\mathfrak{U}(\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1+\mathfrak{S}\mathfrak{G}_1) = \mathfrak{S}\mathfrak{F}_1+\mathfrak{S}\mathfrak{G}_1.$$

Andererseits ist $\mathfrak{F}+\mathfrak{G}$ Majorante von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ (nämlich „*kleinste*“ gemein-

same Majorante), also $\mathfrak{S}(\mathfrak{F}+\mathfrak{G})_1$ Majorante von $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{S}\mathfrak{G}_1$ nach XXI und damit von $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1+\mathfrak{S}\mathfrak{G}_1$:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1+\mathfrak{S}\mathfrak{G}_1 \nleq \mathfrak{S}(\mathfrak{F}+\mathfrak{G})_1.$$

Hieraus ergibt sich XIX.

42. Bei Funktionen von mehreren Argumenten ist es natürlich nicht angängig, die Argumente wegzulassen. Daher versteht es sich stillschweigend, daß das Zeichen $\mathfrak{U}$ in reinen Funktionalrelationen nur die Funktion $\mathfrak{U}\alpha$ (III) vertritt. Für die Funktion $\mathfrak{U}(\alpha,\beta)$ gelten, wenn $\alpha \nleq \beta$ vorausgesetzt wird, die zu XVIa analogen und ebenso leicht zu beweisenden Relationen:

XXIIa) $\mathfrak{S}\mathfrak{U}(\alpha,\beta)=\beta$, XXIIb) $\mathfrak{D}\mathfrak{U}(\alpha,\beta)=\alpha$

aus deren erster für $\alpha=0$ wieder XVIa hervorgeht.

43. Wenn von zwei Argumenten das eine einen konstanten Wert hat, so kann es in der Bezeichnung unterdrückt werden. So werden wir für festgehaltenes μ wiederholt $\mathfrak{U}(\alpha,\mu)$ mit $\mathfrak{V}\alpha$ bezeichnen. Diese Zuordnung ist aus dem einfachen Grunde eine Funktion, weil ihr Wertevorrat auf die Menge $\mathfrak{U}\mathfrak{U}\mu$ beschränkt ist (übrigens auch der Argumentenvorrat auf $\mathfrak{U}\mu$). Die für alle $\alpha \nleq \mu$ definierte Funktion $\mu-\alpha$ (mit auf $\mathfrak{U}\mu$ beschränktem Wertevorrat) werden wir ebenso für festes μ mit $\mathfrak{C}\alpha$ bezeichnen. Für diese Funktionen gelten neben anderen die Relationen:

XVIb) $\mathfrak{D}\mathfrak{V}=\mathfrak{J}$. Xb) Aus $\alpha \nleq \beta$ folgt $\mathfrak{V}\beta \nleq \mathfrak{V}\alpha$.

XXIII) $\mathfrak{C}\mathfrak{C}=\mathfrak{J}$. XXIV) Aus $\alpha \nleq \beta$ folgt $\mathfrak{C}\beta \nleq \mathfrak{C}\alpha$.

44. Von diesen ist XVIb mit $\mathfrak{D}\mathfrak{U}(\alpha,\mu)=\alpha$ (XXIIa) identisch. Wenn A von $\mathfrak{U}\mu$ umfaßt wird, so ist noch $\mathfrak{D}A \nleq \alpha \nleq \mu$ für jedes $\alpha \varepsilon A$, also $A \nleq \mathfrak{U}(\mathfrak{D}A,\mu)$ wofür wir in dem Falle, daß die Beschränkung $A \nleq \mathfrak{U}\mu$ sich von selbst versteht, kürzer

XVIIb) $$\mathfrak{J} \nleq \mathfrak{V}\mathfrak{D}$$

schreiben können.

Die Aussage $\gamma \varepsilon \mathfrak{V}\beta$ bedeutet $\beta \nleq \gamma \nleq \mu$, woraus mit $\alpha \nleq \beta$ sogleich $\alpha \nleq \gamma \nleq \mu$, d. h. $\gamma \varepsilon \mathfrak{V}\alpha$ und danach Xb folgt.

45. XXIII bedarf keiner Erläuterung. Ist $x \varepsilon \mathfrak{C}\beta$, so ist x nicht in β, also auch nicht in $\alpha \nleq \beta$, daher in $\mathfrak{C}\alpha$ enthalten. Da α und $\mathfrak{C}\beta$ kein

gemeinsames Element haben, folgt aus $\alpha \not\in \beta$ auch $\mathfrak{D}\{\alpha, \mathfrak{C}\beta\} = 0$; und gilt dies, so kann umgekehrt kein Element von α in $\mathfrak{C}\beta$, es muß also jedes in β enthalten sein, d. h. aus $\mathfrak{D}\{\alpha, \mathfrak{C}\beta\} = 0$ folgt wieder $\alpha \not\in \beta$.

V. *Monotone Funktionen.*

46. Wenn aus $\alpha \not\in \beta$ stets $\mathfrak{F}\alpha \not\in \mathfrak{F}\beta$ oder stets $\mathfrak{F}\beta \not\in \mathfrak{F}\alpha$ folgt, so nennen wir $\mathfrak{F}$ eine „*monotone*“ Funktion. Im Sinne der Subsumption ist sie im ersten Falle „wachsend“, im zweiten Falle „abnehmend“ für jedes durch Subsumption geordnete Feld. Monotone Funktionen haben wir in $\mathfrak{S}, \mathfrak{U}, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \mathfrak{V}$ und in den Bildfunktionen kennen gelernt.

Die erste Art monotoner Funktionen, für die aus $\alpha \not\in \beta$ stets $\mathfrak{F}\alpha \not\in \mathfrak{F}\beta$ folgt, nennen wir „*homöoton*“, die zweite Art, bei denen die Subsumption der Werte der der Argumente entgegengesetzt ist, „*antiton*“.

47. Bei antitonen Funktionen haben wir sogleich die Stellung der Null zu beachten. Ist $\mathfrak{T}$ antiton und genügt auch $\mathfrak{T}0$ dieser Bedingung, so muß $\mathfrak{T}0$ alle Werte von $\mathfrak{T}$ umfassen. Der Wertevorrat von $\mathfrak{T}$ ist also eine Menge, woraus folgt, daß überhaupt jede antitone Zuordnung, für die die Null ein reguläres Argument ist, eine Funktion sein muß. Aus diesem Grunde erwiesen sich $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{C}$ als Funktionen.

48. Für die Funktion $\mathfrak{D}$ ist dagegen auf alle Fälle die Null ein singuläres Argument. Entweder verzichten wir auf die Definition von $\mathfrak{D}0$, oder wir setzen für $\mathfrak{D}0$ einen die antitone Eigenschaft durchbrechenden Wert (wie es hier geschah, um XIII allgemein gültig zu machen.) Ein gleiches muß für jede antitone Funktion zutreffen, deren Wertevorrat keine Menge ist. Den Schwierigkeiten, die sich hierbei bieten, gehen wir teilweise dadurch aus dem Wege, daß wir in den Feldern solcher antitonen Funktionen, die nicht „*nullregulär*“ sind, die Null tilgen. Mit $\mathfrak{N}A$ bezeichnen wir allgemein diejenige Menge, die aus A hervorgeht, wenn in A das Element 0, sofern es vorhanden ist, getilgt wird. Ist $0 \varepsilon A$, so ist $\mathfrak{N}A = A - \mathfrak{E}0$, andernfalls ist $\mathfrak{N}A = A$. $\mathfrak{N}$ ist ein Spezialfall der Aussonderungsfunktionen (Kap. VII).

49. Sind $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ gleichsinnig monoton, d. h. beide homöoton oder beide antiton, so ist $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ homöoton. Sind $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ ungleichsinnig monoton, so ist $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ antiton. Im ersten Falle ist ferner auch $\mathfrak{F}+\mathfrak{G}$ monoton und zwar im

gleichen Sinne mit $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$. Denn aus $\mathfrak{F}\alpha \neq \mathfrak{F}\beta$, $\mathfrak{G}\alpha \neq \mathfrak{G}\beta$ folgt $\mathfrak{F}\alpha + \mathfrak{G}\alpha \neq \mathfrak{F}\beta + \mathfrak{G}\beta$. Dasselbe gilt auch von $[\mathfrak{F}\alpha, \mathfrak{G}\alpha]$.

50. Die beiden Bedingungen der Monotonie lassen sich durch einfache Funktionalrelationen ausdrücken, bei denen wir nunmehr konsequent mit $\mathfrak{Z}$ eine homöotone, mit $\mathfrak{T}$ eine antitone Funktion bezeichnen.

Es ist $\alpha \neq \alpha + \beta$, daher $\mathfrak{Z}\alpha \neq \mathfrak{Z}(\alpha+\beta)$, ebenso $\mathfrak{Z}\beta \neq \mathfrak{Z}(\alpha+\beta)$, daher auch

(a) $$\mathfrak{Z}\alpha + \mathfrak{Z}\beta \neq \mathfrak{Z}(\alpha+\beta).$$

Rückwärts folgt hieraus, wenn $\alpha \neq \beta$, also $\alpha+\beta=\beta$ wird:

$$\mathfrak{Z}\alpha + \mathfrak{Z}\beta \neq \mathfrak{Z}\beta, \text{ d. h. } \mathfrak{Z}\alpha \neq \mathfrak{Z}\beta.$$

51. Es läßt sich (a) auf ein beliebiges Feld A von $\mathfrak{Z}$ erweitern, wenn nur $\mathfrak{S}A$ Argument von $\mathfrak{Z}$ ist. Aus $\alpha \varepsilon A$ folgt nämlich $\alpha \neq \mathfrak{S}A$, $\mathfrak{Z}\alpha \neq \mathfrak{Z}\mathfrak{S}A$ für jedes $\alpha \varepsilon A$, d. h. für jedes $\mathfrak{Z}\alpha \varepsilon \mathfrak{Z}_1 A$*), also $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1 A \neq \mathfrak{Z}\mathfrak{S}A$**) oder mit Weglassung des Argumentes:

XXVa) $$\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1 \neq \mathfrak{Z}\mathfrak{S}.$$

Übrigens bewiesen wir bereits in § 31 die Beziehung $\mathfrak{Z}_1 \neq \mathfrak{U}\mathfrak{Z}\mathfrak{S}$, aus der sogleich nach (VIIId) und (XVIa) $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1 \neq \mathfrak{S}\mathfrak{U}\mathfrak{Z}\mathfrak{S} = \mathfrak{Z}\mathfrak{S}$ folgt.

52. Wenn A nicht leer ist, so ist $\mathfrak{D}A \neq \alpha$ für jedes $\alpha \varepsilon A$, $\mathfrak{Z}\mathfrak{D}A \neq \mathfrak{Z}\alpha$ für jedes $\mathfrak{Z}\alpha \varepsilon \mathfrak{Z}_1 A$, also (IXb) $\mathfrak{Z}\mathfrak{D}A \neq \mathfrak{D}\mathfrak{Z}_1 A$, d. h.

XXVb) $$\mathfrak{Z}\mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}\mathfrak{Z}_1 \text{ (für nichtleeres Argument).}$$

Die Beschränkung fällt für $\mathfrak{Z}0=0$, also beispielsweise, wenn $\mathfrak{Z}$ eine Bildfunktion ist. Aber auch mit der Beschränkung ist XXVb eine notwendige und hinreichende Bedingung der Homöotonie. Für irgend zwei Argumente $\alpha \neq \beta$ ist nämlich $A = \{\alpha, \beta\}$ nicht leer, daher

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{D}A = \mathfrak{Z}\alpha \neq \mathfrak{D}\{\mathfrak{Z}\alpha, \mathfrak{Z}\beta\} \neq \mathfrak{Z}\beta.$$

53. Wenn $\mathfrak{S}A \varepsilon A$ gilt, so wird $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}A \varepsilon \mathfrak{Z}_1 A$, $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}A \neq \mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1 A$ (VIIIc). Ebenso folgt aus $\mathfrak{D}A \varepsilon A$: $\mathfrak{Z}\mathfrak{D}A \varepsilon \mathfrak{Z}_1 A$, $\mathfrak{D}\mathfrak{Z}_1 A \neq \mathfrak{Z}\mathfrak{D}A$. Dies gilt auch für

*) XII. **) VIIIb.

nichthomöotones $\mathfrak{Z}$. Im Falle der Homöotonie gehen also für ein Argument mit größtem resp. kleinstem Element XXVa und b in Identitäten über.

54. Da aus $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ stets $\mathfrak{Z}\alpha \leqq \mathfrak{Z}\beta \leqq \mathfrak{Z}\gamma$, d. h. aus $\beta \varepsilon \mathfrak{U}(\alpha, \gamma)$ stets $\mathfrak{Z}\beta \varepsilon \mathfrak{U}(\mathfrak{Z}\alpha, \mathfrak{Z}\gamma)$ folgt, wird $\mathfrak{Z}_1\mathfrak{U}(\alpha,\gamma) \leqq \mathfrak{U}(\mathfrak{Z}\alpha, \mathfrak{Z}\gamma)$. Wählen wir $\alpha = 0$ und beachten, daß stets $\mathfrak{U}(\lambda,\mu) \leqq \mathfrak{U}\mu$, so folgt im besonderen mit Weglassung des Argumentes γ:

(XXVc) $$\mathfrak{Z}_1\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{U}\mathfrak{Z}.$$

Wenn andererseits $\mathfrak{Z}\mu \leqq \mu$ sein sollte, so ist $\mathfrak{U}(\mathfrak{Z}\alpha, \mathfrak{Z}\mu) \leqq \mathfrak{U}(\mathfrak{Z}\alpha, \mu)$. Denken wir uns μ festgehalten und $\mathfrak{V}\alpha$ für $\mathfrak{U}(\alpha, \mu)$ geschrieben, so kommt:

(XXVd) $$\mathfrak{Z}_1\mathfrak{V} \leqq \mathfrak{V}\mathfrak{Z} \quad (\text{wenn } \mathfrak{Z}\mu \leqq \mu).$$

55. Wir beachten hierbei, daß die Verwendung antitoner Funktionen, wie $\mathfrak{D}, \mathfrak{V}$ stets zu Beschränkungen Anlaß gibt. Dies erschwert auch eine rein formale Überleitung solcher, mit antitonen Funktionen behafteten Funktionalbeziehungen. Dagegen lassen sich XXVa und c höchst einfach in einander überführen. Aus $\mathfrak{Z}_1\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{U}\mathfrak{Z}$ folgt nämlich nach VIIId:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1\mathfrak{U}\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{S}\mathfrak{U}\mathfrak{Z}\mathfrak{S} = \mathfrak{Z}\mathfrak{S}.^*)$$

Links aber sind $\mathfrak{S}$ und als Bildfunktion $\mathfrak{Z}_1$ homöoton, daher ist nach XVIIa: $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1 \leqq \mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1\mathfrak{U}\mathfrak{S}$, womit (XXVa) folgt.

Umgekehrt ergibt sich aus $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1 \leqq \mathfrak{Z}\mathfrak{S}$ nach (Xa)

$$\mathfrak{U}\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{U}\mathfrak{Z}\mathfrak{S}\mathfrak{U} = \mathfrak{U}\mathfrak{Z}^*),$$

und links ist nach (XVIIa): $\mathfrak{Z}_1\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{U}\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1\mathfrak{U}$.

56. Ist $\mathfrak{T}$ antiton, A Feld von $\mathfrak{T}$, so wird $\alpha \leqq \mathfrak{S}A$, $\mathfrak{T}\mathfrak{S}A \leqq \mathfrak{T}\alpha$, für jedes $\alpha \varepsilon A$, $\mathfrak{T}\alpha \varepsilon \mathfrak{T}_1 A$, somit $\mathfrak{T}\mathfrak{S}A \leqq \mathfrak{D}\mathfrak{T}_1 A$:

(XXVIa) $$\mathfrak{T}\mathfrak{S} \leqq \mathfrak{D}\mathfrak{T}_1 \quad (A \text{ nichtleer, } \mathfrak{T} \text{ nullregulär}).$$

---

*) Aus $\mathfrak{F} \leqq \mathfrak{G}$ folgt $\mathfrak{F}\mathfrak{H} \leqq \mathfrak{G}\mathfrak{H}$ für alle Argumente x von $\mathfrak{H}$, deren zugehörige Werte $\mathfrak{H}x$ Argumente von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ sind. Auf anderes ist bei diesem Anhängen einer Funktion in einer Funktionalrelation nicht zu achten. In unseren Beispielen hat man sich nur zu entsinnen, daß die Werte von $\mathfrak{S}$ *Mengen*, also Argumente von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{Z}$ sind, während die Werte von $\mathfrak{U}$ Mengen *zweiter* Stufe, also Argumente von $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{S}$ sind.

Wenn $\mathfrak{T}$ nullsingulär ist, so haben wir nur aus A die Null zu tilgen, und da dies auf die Vereinigung von A keinen Einfluß hat, bleibt in diesem Fall

(XXVIa′) $\qquad \mathfrak{T}\mathfrak{S} \neq \mathfrak{D}\mathfrak{T}_1\mathfrak{N}$ (für nullsinguläres $\mathfrak{T}$).

Wenn A selbst leer ist, so bleiben (XXVIa) und (XXVIa′) nur gültig, wenn $\mathfrak{T}0 = 0$ ist. Dies ist z. B. für $\mathfrak{D}$ zutreffend, aber für keine nullreguläre Funktion.

57. Es wird ferner $\mathfrak{D}A \neq \alpha$, $\mathfrak{T}\alpha \neq \mathfrak{T}\mathfrak{D}A$ für jedes $\alpha \varepsilon A$, $\mathfrak{T}\alpha \varepsilon \mathfrak{T}_1 A$, also nach (VIIIc):

(XXVIb) $\qquad \mathfrak{S}\mathfrak{T}_1 \neq \mathfrak{T}\mathfrak{D}.$

Für nullsinguläres $\mathfrak{T}$ ist ein Argument mit leerem Kern auszuschließen, dagegen ist für $A = 0$ auch die linke Seite Null, daher die Relation sicher erfüllt.

58. Ist $\mathfrak{S}A \varepsilon A$, so ist $\mathfrak{T}\mathfrak{S}A \varepsilon \mathfrak{T}_1 A$, $\mathfrak{D}\mathfrak{T}_1 A \neq \mathfrak{T}\mathfrak{S}A$. Aus $\mathfrak{D}A \varepsilon A$ folgt ebenso $\mathfrak{T}\mathfrak{D}A \neq \mathfrak{S}\mathfrak{T}_1 A$. Dies gilt wieder für jede Funktion $\mathfrak{T}$; für eine antitone Funktion werden (XXVIa) und (XXVIb) zu Identitäten, wenn $\mathfrak{S}A$ resp. $\mathfrak{D}A$ in A enthalten ist.

59. Aus $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ folgt $\mathfrak{T}\gamma \neq \mathfrak{T}\beta \neq \mathfrak{T}\alpha$, d. h. aus $\beta \varepsilon \mathfrak{U}(\alpha, \gamma)$: $\mathfrak{T}\beta \varepsilon \mathfrak{U}(\mathfrak{T}\gamma, \mathfrak{T}\alpha)$ d. h. es ist $\mathfrak{T}_1\mathfrak{U}(\alpha, \gamma) \neq \mathfrak{U}(\mathfrak{T}\gamma, \mathfrak{T}\alpha)$. Diese Formel spezialisieren wir durch Einführung der Funktion $\mathfrak{V}\xi = \mathfrak{U}(\xi, \mu)$ auf zwei Arten, ähnlich wie in § 54. Wir definieren vorübergehend für ein Feld M von $\mathfrak{T}$ $\mathfrak{T}0$ als $\mathfrak{S}\mathfrak{T}_1 M$, wodurch $\mathfrak{T}$ für M nullregulär wird. Sodann wählen wir $\alpha = 0$, $\mu = \mathfrak{S}\mathfrak{T}_1 M$ und befreien uns von $\mathfrak{T}0$ nachträglich durch Nullausschließung. Es folgt:

(XXVIc) $\qquad \mathfrak{T}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U} \neq \mathfrak{V}\mathfrak{T}$ (für nichtleeres Argument).

Wählen wir dagegen $\gamma = \mathfrak{S}\mu = M$, so erhalten wir:

(XXVId) $\qquad \mathfrak{T}_1\mathfrak{V} \neq \mathfrak{U}\mathfrak{T},$

wenn für nullsinguläres $\mathfrak{T}$ wieder das Argument 0 ausgeschlossen bleibt.

60. Überleitungen formaler Art analog denen des § 55 lassen sich herstellen, erfordern aber besondere Beachtung der Nullsingularität und des versteckten Argumentes in $\mathfrak{V}$. Die Nebenbetrachtungen machen die Vorteile

der rein formalen Überleitung, soweit ich den Gegenstand verfolgte, ziemlich illusorisch. Die Überleitungen haben folgende Form:

$$\mathfrak{Z}_1\mathfrak{V} \neq \mathfrak{V}\mathfrak{D}\mathfrak{Z}_1 \neq \mathfrak{V}\mathfrak{Z}\mathfrak{D}\mathfrak{V} = \mathfrak{V}\mathfrak{Z} \text{ (XXVd aus b)}$$
$$\mathfrak{T}_1\mathfrak{V} \neq \mathfrak{U}\mathfrak{S}\mathfrak{T}_1\mathfrak{V} \neq \mathfrak{U}\mathfrak{T}\mathfrak{D}\mathfrak{V} = \mathfrak{U}\mathfrak{T} \text{ (XXVId aus b)}$$
$$\mathfrak{T}_1\mathfrak{U} \neq \mathfrak{V}\mathfrak{D}\mathfrak{T}_1\mathfrak{U} \neq \mathfrak{V}\mathfrak{T}\mathfrak{S}\mathfrak{U} = \mathfrak{V}\mathfrak{T} \text{ (XXVIc aus a)}$$

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{D} = \mathfrak{D}\mathfrak{V}\mathfrak{Z}\mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}\mathfrak{Z}_1\mathfrak{V}\mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}\mathfrak{Z}_1 \text{ (XXVb aus d)}$$
$$\mathfrak{S}\mathfrak{T}_1 \neq \mathfrak{S}\mathfrak{T}_1\mathfrak{V}\mathfrak{D} \neq \mathfrak{S}\mathfrak{U}\mathfrak{T}\mathfrak{D} = \mathfrak{T}\mathfrak{D} \text{ (XXVIb aus d)}$$
$$\mathfrak{T}\mathfrak{S} = \mathfrak{D}\mathfrak{V}\mathfrak{T}\mathfrak{S} \neq \mathfrak{D}\mathfrak{T}_1\mathfrak{U}\mathfrak{S} \neq \mathfrak{D}\mathfrak{T}_1 \text{ (XXVIa aus c),}$$

wobei von der Nullsingularität abgesehen ist.

VI. *Distributive Funktionen.*

61. Eine Funktion $\mathfrak{Z}$ heißt „*distributiv*“, wenn für jedes Feld $A = \{\alpha, \beta, \gamma \ldots\}$ das distributive Gesetz

$$\mathfrak{Z}\alpha + \mathfrak{Z}\beta + \mathfrak{Z}\gamma + \cdots = \mathfrak{Z}\{\alpha + \beta + \gamma + \cdots\}$$

oder kürzer, wenn die Funktionalgleichung:

$$\text{(XXVII.)} \qquad \mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}\mathfrak{S}$$

besteht. Distributive Funktionen sind also ein Spezialfall homöotoner Funktionen*).

---

*) Es gilt insbesondere $\mathfrak{Z}\alpha + \mathfrak{Z}\beta = \mathfrak{Z}(\alpha+\beta)$. Aber von dieser, für ein zweigliedriges Feld gültigen Relation kann *nicht* auf ein beliebiges Feld A geschlossen werden. Dies ist beachtenswert, weil aus $\mathfrak{Z}\alpha + \mathfrak{Z}\beta \neq \mathfrak{Z}(\alpha+\beta)$ auf $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1 A \neq \mathfrak{Z}\mathfrak{S}A$ geschlossen werden kann. Eine Funktion, für die $\mathfrak{Z}\alpha + \mathfrak{Z}\beta = \mathfrak{Z}(\alpha+\beta)$ ist, ist also wohl homöoton, nicht notwendig aber distributiv.

Dies läßt sich an folgendem Beispiel einsehen. Man setze $\mathfrak{Z}\alpha$ für jede endliche Menge gleich 0, für jede unendliche gleich $\mathfrak{E}0$. Dann ist $\mathfrak{Z}\alpha + \mathfrak{Z}\beta = \mathfrak{Z}(\alpha+\beta)$, denn wenn α, β endlich sind, so ist es auch $\alpha+\beta$, und wir erhalten $0+0=0$. Ist dagegen α oder α und β unendlich, so ist $\alpha+\beta$ unendlich, und wir erhalten $0+\mathfrak{E}0=\mathfrak{E}0$ oder $\mathfrak{E}0+\mathfrak{E}0=\mathfrak{E}0$.

Ist nunmehr A eine unendliche Menge endlicher Mengen, so ist $\mathfrak{Z}\alpha=0$ für jedes $\alpha \varepsilon A$, also auch $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1 A=0$. Sorgt man aber dafür, daß $\mathfrak{S}A$ unendlich wird, so wird $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}A = \mathfrak{E}0$, also von $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1 A$ verschieden.

62. Wenn $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ distributiv sind, so gilt das gleiche von $\mathfrak{F}\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}+\mathfrak{G}$. Denn es wird

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{F}\mathfrak{G})_1 = \mathfrak{S}\mathfrak{F}_1\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{F}\mathfrak{S}\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{F}\mathfrak{G}\mathfrak{S},$$
$$\mathfrak{S}(\mathfrak{F}+\mathfrak{G})_1 = \mathfrak{S}\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{S}\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{F}\mathfrak{S} + \mathfrak{G}\mathfrak{S} = (\mathfrak{F}+\mathfrak{G})\mathfrak{S}.$$

63. *Die Funktion* $\mathfrak{S}$ *ist distributiv*, in Zeichen:

(XXVIIIa) $$\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}\mathfrak{S}.$$

Es ist nämlich:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{S} = \mathfrak{S}\mathfrak{S}\mathfrak{J} = \mathfrak{S}\mathfrak{S}\mathfrak{J}_1 \neq \mathfrak{S}\mathfrak{S}(\mathfrak{U}\mathfrak{S})_1 = \mathfrak{S}\mathfrak{S}\mathfrak{U}_1\mathfrak{S}_1 \neq \mathfrak{S}\mathfrak{U}\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$$

unter Verwendung von (XVIIa), (XXI), (XVIII), (XVIa) und der Homöotonie von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{S}$, insbesondere XXVa für $\mathfrak{Z} = \mathfrak{U}$. Aus eben dieser Formel ergibt sich aber auch $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1 \neq \mathfrak{S}\mathfrak{S}$, womit (XXVIIIa) bewiesen ist. Die Formel (XXVIIIa) spricht das assoziative Gesetz der Addition aus.

64. *Alle Bildfunktionen sind distributiv;* in Zeichen:

(XXIXa) $$\mathfrak{S}\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1\mathfrak{S}.$$

Hier müssen wir auf die Definition zurückgehen. Es bedeutet nach (VII) und (V) die Aussage $x \varepsilon \mathfrak{F}_1\mathfrak{S}\ A$:

$$x = \mathfrak{F}a,\ a \varepsilon \alpha,\ \alpha \varepsilon A,$$

oder nach (XII):

$$x = \mathfrak{F}a,\ \mathfrak{F}a \varepsilon \mathfrak{F}_1\alpha,\ \mathfrak{F}_1\alpha \varepsilon \mathfrak{F}_2 A,$$

d. h. nach (V):

$$x \varepsilon \mathfrak{S}\mathfrak{F}_2 A.$$

Damit erhalten wir: $\mathfrak{F}_1\mathfrak{S}A \neq \mathfrak{S}\mathfrak{F}_2 A$, und da alle Bildfunktionen homöoton sind, steht auch die umgekehrte Subsumption bereits fest, womit unsere Behauptung folgt.

65. Aus (XXVIIIa) und (XXIXa) ergibt sich, daß, wie auch $\mathfrak{F}$ gewählt sein mag, stets $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1$ distributiv ist. Aber umgekehrt läßt sich auch jede distributive Funktion $\mathfrak{Z}$ als $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1$ darstellen.

Denn nach (XXa) ist $\mathfrak{Z}\alpha = \mathfrak{Z}\mathfrak{S}\mathfrak{E}_1\alpha = \mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1\mathfrak{E}_1\alpha = \mathfrak{S}(\mathfrak{Z}\mathfrak{E})_1\alpha$. Voraussetzung ist dabei nur, daß $\mathfrak{Z}$ für jede Untermenge jedes seiner Argumente definiert ist, insbesondere für $\mathfrak{E}a$, wenn $a \varepsilon \alpha$ und α Argument von $\mathfrak{Z}$ ist.

66. Für Bildfunktionen wird auch stets in (XXVc) die Subsumption durch die Identität ersetzt, in Zeichen:

$$\text{(XXIXb)} \qquad \mathfrak{F}_2\mathfrak{U} = \mathfrak{U}\mathfrak{F}_1.$$

Wir haben nur $\mathfrak{U}\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2\mathfrak{U}$ zu beweisen, und diese Relation hat allgemein, als

$$\mathfrak{U}\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{Z}_1\mathfrak{U}$$

geschrieben, folgenden Sinn: *Ist* $\mu = \mathfrak{Z}\alpha$ *und* $\nu \subseteq \mu$ (d. h. ist $\nu \varepsilon \mathfrak{U}\mathfrak{Z}\alpha$), *so ist* $\nu = \mathfrak{Z}\beta$ *und* $\beta \subseteq \alpha$. (d. h. $\nu \varepsilon \mathfrak{Z}_1\mathfrak{U}\alpha$).

67. Ist $\mathfrak{Z}$ eine Bildfunktion, so gibt es im allgemeinen mehrere Mengen β der verlangten Eigenschaft. Jedes $x \varepsilon \nu$ ist nämlich ein Wert, den $\mathfrak{F}a$ für *mindestens ein* $a \varepsilon \alpha$ annimmt. Man wird von diesen a im allgemeinen eines oder mehrere auswählen können, und wenn man sich für jedes $x \varepsilon \nu$ eine solche Wahl getroffen denkt, so bilden die ausgewählten Elemente a eine Menge β der verlangten Eigenschaft. Um diesen Beweis streng zu gestalten, muß allerdings gezeigt werden, daß alle $a \varepsilon \alpha$, für die $\mathfrak{F}a = x$ wird, eine Menge $\mathfrak{M}x \subseteq \alpha$ bilden, und daß $\mathfrak{M}_1\nu$ eine Zerlegung ist. Das geht ohne Mühe.

68. Wesentlich einfacher und ohne Berufung auf das Auswahlpostulat ist folgende Betrachtung: für jedes $a \varepsilon \alpha$ ist es definit, ob $\mathfrak{F}a \varepsilon \nu$ ist. Alle solche $a \varepsilon \alpha$, für die dies zutrifft, bilden daher eine Untermenge $\beta \subseteq \alpha$, von der man mühelos erkennt, daß sie die geforderte Eigenschaft besitzt. Sie ist zugleich die größte Untermenge ihrer Art, d. h. wenn auch $\mathfrak{F}_1\gamma = \nu$ und $\gamma \subseteq \alpha$, so ist $\gamma \subseteq \beta$.

69. Rein formal gelangt man mittels des soeben definierten $\mathfrak{M}x$ wie folgt zum Ziele. Nach Definition ist $\mathfrak{F}_1\mathfrak{M}x = \mathfrak{E}x$, also $\mathfrak{F}_1\mathfrak{S}\mathfrak{M}_1\nu = \mathfrak{S}\mathfrak{F}_2\mathfrak{M}_1\nu = \mathfrak{S}(\mathfrak{F}_1\mathfrak{M})_1\nu = \mathfrak{S}\mathfrak{E}_1\nu = \nu$, und da $\mathfrak{M}x \subseteq \alpha$ für jedes $x \varepsilon \mu$, ist auch $\mathfrak{S}\mathfrak{M}_1\nu \subseteq \alpha$.

Die Menge $\mathfrak{S}\mathfrak{M}_1\nu=\beta$ genügt also den Anforderungen $\beta \neq \alpha$, $\mathfrak{F}_1\beta=\nu$. Sie stimmt mit der zuletzt definierten Menge β überein.

VII. *Aussonderungsfunktionen.*

70. Eine besonders einfache Klasse distributiver Funktionen sind die aus dem Aussonderungsaxiom entspringenden Aussonderungsfunktionen. Zu jeder Aussage $\mathfrak{a}x$, die für die Elemente eines Bereiches Ω definit ist, gehört eine solche Funktion $\mathfrak{A}$. Sie ist definiert für jede Menge α, deren Elemente in Ω enthalten sind; ihr Wert $\mathfrak{A}\alpha$ ist diejenige Untermenge von α, die alle und nur solche $x \varepsilon \alpha$ enthält, für die $\mathfrak{a}x$ wahr ist. Im besonderen ist $\mathfrak{A}\mathfrak{E}x=0$ oder $=\mathfrak{E}x$ jenachdem $\mathfrak{a}x$ falsch oder wahr ist, so daß wir die Aussage $\mathfrak{a}x$ durch $\mathfrak{A}\mathfrak{E}x=\mathfrak{E}x$ ersetzen können.

71. Nun enthält $\mathfrak{S}\mathfrak{A}_1\mathfrak{E}_1\alpha$ genau alle solche $x \varepsilon \alpha$, für die $\mathfrak{A}\mathfrak{E}x=\mathfrak{E}x$ wird, denn alle andern liefern nur leere Glieder in die Summe, d. h. es ist

$$\mathfrak{S}\mathfrak{A}_1\mathfrak{E}_1=\mathfrak{A},$$

woraus wir ersehen, daß $\mathfrak{A}$ distributiv ist. Diese Bedingung zusammen mit $\mathfrak{A}\alpha \neq \alpha$ oder $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{J}$ charakterisiert die Aussonderungsfunktionen vollständig. Denn da $\mathfrak{E}x$ nur die Untermengen 0 und $\mathfrak{E}x$ umfaßt, kann $\mathfrak{A}\mathfrak{E}x$ nur einen der Werte 0 oder $\mathfrak{E}x$ besitzen, wenn $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{J}$ sein soll. Ist andererseits $\mathfrak{A}$ distributiv, also $\mathfrak{A}=\mathfrak{S}\mathfrak{A}_1\mathfrak{E}_1$, so besteht $\mathfrak{A}\alpha$ aus allen und nur denjenigen Elementen x von α, für die die Aussage $\mathfrak{A}\mathfrak{E}x=\mathfrak{E}x$ wahr ist.

72. Es ist nun $\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{E}x=\mathfrak{A}\mathfrak{E}x$. Entweder nämlich ist $\mathfrak{A}\mathfrak{E}x=\mathfrak{E}x$, woraus die Behauptung sofort folgt, oder es ist $\mathfrak{A}\mathfrak{E}x=0$, $\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{E}x=\mathfrak{A}0$ und wegen $\mathfrak{A}0 \neq 0$ selbst Null, womit wiederum die Behauptung erwiesen ist. Nunmehr wird nach § 52 mit $\mathfrak{A}$ auch $\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ distributiv, daher nach § 65:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}\alpha = \mathfrak{S}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{E})_1\alpha = \mathfrak{S}(\mathfrak{A}\mathfrak{E})_1\alpha = \mathfrak{A}\alpha.$$

Die Aussonderungsfunktionen genügen also der Identität

(XXXa) $$\mathfrak{A}\mathfrak{A}=\mathfrak{A}.$$

73. Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei verschiedene Aussonderungsfunktionen, so ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{E}x=\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{E}x$, nämlich gleich $\mathfrak{E}x$, wenn $\mathfrak{B}\mathfrak{E}x=\mathfrak{E}x$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{E}x=\mathfrak{E}x$ wird, andernfalls gleich Null.

Mit $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ sind aber auch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ distributiv. Daher wird: $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\alpha = \mathfrak{S}(\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{E})_1\alpha = \mathfrak{S}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{E})_1\alpha = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\alpha$. Für irgend zwei Aussonderungsfunktionen gilt also

(XXXb) $$\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}^*).$$

Auch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist eine Aussonderungsfunktion, da aus $\mathfrak{B} \notin \mathfrak{J}$: $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \notin \mathfrak{A}$ und mit $\mathfrak{A} \notin \mathfrak{J}$: $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \notin \mathfrak{J}$ folgt. Die Reihenfolge mehrerer Aussonderungen ist also gleichgültig, was übrigens evident ist, und mehrere Aussonderungen können zu einer einzigen zusammengefaßt werden.

74. Ersichtlich ist der Durchschnitt eine Aussonderungsfunktion für jedes seiner Argumente: $\mathfrak{D}\{\alpha, \beta, \gamma \ldots\}$ enthält alle diejenigen Elemente von α, für die die Aussagen $x \varepsilon \beta, x \varepsilon \gamma, \ldots$ usf. oder die eine Aussage $x \varepsilon \mathfrak{D}\{\beta, \gamma \ldots\}$ wahr sind. Während also $\mathfrak{D}A$ als Funktion von A, d. h. als *Kern*, *antiton* ist, ist $\mathfrak{S}A$ als *Durchschnitt*, d. h. als Funktion eines Elementes von A, distributiv, also *homöoton*.

75. Eine Aussonderungsfunktion haben wir noch in $\alpha - \mathfrak{D}\{\alpha, \beta\}$ vor uns. Sie enthält alle *nicht* in β enthaltenen Elemente von α. Ein Spezialfall ist die Nulltilgungsfunktion $\mathfrak{N}A = A - \mathfrak{D}\{A, \mathfrak{E}0\}$.

76. Ist $\beta \notin \mathfrak{A}\alpha$, so enthält β nur Elemente von $\mathfrak{A}\alpha$, d. h. solche, für die $\mathfrak{A}\mathfrak{E}x = \mathfrak{E}x$ wird. Es ist daher

(a) $$\mathfrak{A}\beta = \beta \text{ für jedes } \beta \notin \mathfrak{A}\alpha.$$

Um auch dies rein formal zu zeigen, wählen wir die Aussonderungsfunktion $\mathfrak{B}\xi = \mathfrak{D}\{\beta, \xi\}$, zur Aussage $x \varepsilon \beta$ gehörig; dann ist wegen $\beta \notin \mathfrak{A}\alpha$: $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\alpha = \beta$, also $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{A}\alpha = \mathfrak{A}\beta$. Die linke Seite wird aber zu $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{A}\alpha = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\alpha = \beta$.

77. Nach der allgemeinen Betrachtung des § 66 folgt aus (a) sogleich, daß auch für die Aussonderungsfunktionen

(XXXc) $$\mathfrak{A}_1\mathfrak{U} = \mathfrak{U}\mathfrak{A}$$

gelten muß. Denn jede Untermenge ν von $\mu = \mathfrak{A}\alpha$ läßt sich als $\mathfrak{A}\beta$, $\beta \notin \alpha$ auffassen beispielsweise für $\beta = \nu$.

---

*) Dieser Beweis stützt sich nur darauf, daß $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{E} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{E}$ ist und $\mathfrak{A} = \mathfrak{S}(\mathfrak{A}\mathfrak{E})_1$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}(\mathfrak{B}\mathfrak{E})_1$ distributiv sind, nicht darauf, daß $\mathfrak{A} \notin \mathfrak{J}$ und $\mathfrak{B} \notin \mathfrak{J}$ ist.

78. Gilt umgekehrt XXXa und c, so können wir zeigen, daß $\mathfrak{A}\nu = \nu$ für jedes $\nu \neq \mathfrak{A}\alpha$ sein muß. Es ist nämlich $\nu \varepsilon \mathfrak{U}\mathfrak{A}\alpha = \mathfrak{A}_1\mathfrak{U}\alpha$, d. h. $\nu = \mathfrak{A}\beta$, $\beta \varepsilon \mathfrak{U}\alpha$, also $\mathfrak{A}\nu = \mathfrak{A}\mathfrak{A}\beta = \mathfrak{A}\beta = \nu$.

79. Ist $\mathfrak{F}$ irgend eine Funktion, die $\mathfrak{J}$ zur Majoranten hat, so ist $\mathfrak{F}\mathfrak{A}\alpha \neq \mathfrak{A}\alpha$, also nach dem vorigen

(XXXIa) $$\mathfrak{A}\mathfrak{F}\mathfrak{A} = \mathfrak{F}\mathfrak{A}.$$

Die Relationen XXXa und c bleiben bestehen, wenn man $\mathfrak{A}$ durch seine Bildfunktion ersetzt. Es gilt daher auch

(XXXIb) $$\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{F}\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{F}\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{F}\mathfrak{A}_2,\ \ldots$$

wenn $\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{J}$ gilt und die angeschriebenen Ausdrücke sinnvoll sind.

80. Aus $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{J}$ folgt nach XXI: $\mathfrak{D}\mathfrak{A}_1 \neq \mathfrak{D}\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{D}$, daraus $\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{A}_1 \neq \mathfrak{A}\mathfrak{D}$. Es ist aber $\mathfrak{D}\mathfrak{A}_1 \neq \mathfrak{S}\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{S}$, also $\mathfrak{A}\mathfrak{D}\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{D}\mathfrak{A}_1$, und da nach (XXVb) auch $\mathfrak{A}\mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}\mathfrak{A}_1$ gelten muß, wird

(XXXd) $\mathfrak{D}\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{D}$ für jede Aussonderungsfunktion $\mathfrak{A}$,

und zwar auch für verschwindendes Argument, wie man nachträglich leicht feststellt.

In $\mathfrak{A}_1\mathfrak{V} \neq \mathfrak{V}\mathfrak{A}$ läßt sich die Subsumption nicht durch die Identität ersetzen, dafür aber ist die beschränkende Bedingung $\mathfrak{A}\mu \neq \mu$ für das versteckte Argument von $\mathfrak{V}$ bereits durch die Forderung $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{J}$ erfüllt.

81. Wir betrachten noch kurz die Nulltilgung bei Bildfunktionen. Die Aussage „$\mathfrak{F}x$ ist nicht Null“ definiert eine Aussonderungsfunktion $\mathfrak{G}\alpha$, derart, daß $\mathfrak{F}_1\mathfrak{G}\alpha$ stets nullfrei und gleich $\mathfrak{N}\mathfrak{F}_1\alpha$ wird.

Setzen wir für $\mathfrak{F}$ eine Bildfunktion $\mathfrak{F}_1$, so ist das einzige Argument, für das $\mathfrak{F}_1$ verschwindet, die Null selbst, und daher $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}$. Somit ist stets

(XXXIIa) $$\mathfrak{N}\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_2\mathfrak{N}.$$

82. Die einzigen Argumente, für die $\mathfrak{S}$ verschwindet, sind $\mathfrak{E}0$ und 0. Entweder nämlich ist das Argument A selbst oder jedes Element des

Argumentes A leer, wenn $\mathfrak{S}A$ leer ist. Da nun $\mathfrak{N}\mathfrak{E}0=0$ ist, ist ganz allgemein, auch für das Argument $\mathfrak{E}0$:

(XXXIIb) $$\mathfrak{S}\mathfrak{N}A=\mathfrak{S}A.$$

Ist jetzt $\mathbf{A}$ ein Feld von $\mathfrak{S}$, so ist danach $\mathfrak{S}_1\mathfrak{N}_1\mathbf{A}=\mathfrak{S}_1\mathbf{A}$; in $\mathfrak{N}_1\mathbf{A}$ kann $\mathfrak{E}0$ nicht mehr vorkommen, da kein Element $\mathfrak{N}A$, $A\,\varepsilon\,\mathbf{A}$ von $\mathfrak{N}_1\mathbf{A}$ die Null enthält. Sollte also in $\mathfrak{S}_1\mathbf{A}$ die Null noch enthalten sein, so rührt sie davon her, daß sie in $\mathfrak{N}_1 A$ enthalten ist. Es wird daher

(XXXIIc) $$\mathfrak{N}\mathfrak{S}_1=\mathfrak{S}_1\mathfrak{N}\mathfrak{N}_1.$$

VIII. *Spezielle monotone Funktionen.*

83. Wählen wir in den Funktionalrelationen XXV bis XXVI für $\mathfrak{Z}$ eine der Funktionen $\mathfrak{S},\mathfrak{U}$, für $\mathfrak{T}$ $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{V}$, so erhalten wir insgesamt 16 Beziehungen, allerdings von ungleichem Werte. Einige von ihnen zeichnen sich dadurch aus, daß die Subsumption in die Identität übergeht.

Aus (XXVb) folgt für $\mathfrak{Z}=\mathfrak{S}$: $\mathfrak{S}\mathfrak{D}\neq\mathfrak{D}\mathfrak{S}_1$, also auch $\mathfrak{U}\mathfrak{S}\mathfrak{D}\mathfrak{U}_1\neq\mathfrak{U}\mathfrak{D}\mathfrak{S}_1\mathfrak{U}_1$ und nach (XVIIa) und (XVIa): $\mathfrak{D}\mathfrak{U}_1\neq\mathfrak{U}\mathfrak{D}$. Mit (XXVb) für $\mathfrak{Z}=\mathfrak{U}$ wird daraus

(XXXIIIa) $$\mathfrak{D}\mathfrak{U}_1=\mathfrak{U}\mathfrak{D}$$ (für nichtleeres Argument).

Die Beschränkung ist wesentlich, da für das Argument 0 die linke Seite zu 0, die rechte zu $\mathfrak{U}0=\{0\}=\mathfrak{E}0$ wird.

Aus (XXVIb) folgt für $\mathfrak{T}=\mathfrak{D}$: $\mathfrak{S}\mathfrak{D}_1\neq\mathfrak{D}\mathfrak{D}$, also auch $\mathfrak{V}\mathfrak{D}\mathfrak{D}\mathfrak{V}_1\neq\mathfrak{V}\mathfrak{S}\mathfrak{D}_1\mathfrak{V}_1$, wenn wir beachten, daß $\mathfrak{V}$ antiton ist. Nach (XVIIb) und (XVIb) wird damit $\mathfrak{D}\mathfrak{V}_1\neq\mathfrak{V}\mathfrak{S}$; das umgekehrte folgt aus (XXVIa) für $\mathfrak{T}=\mathfrak{V}$. Also wird:

(XXXIIIb) $$\mathfrak{D}\mathfrak{V}_1=\mathfrak{V}\mathfrak{S}$$ (für nichtleeres Argument).

Auch hier ist die Beschränkung wesentlich. Als verstecktes Argument von $\mathfrak{V}$ kann die Vereinigung des Argumentes oder jede ihrer Übermengen dienen.

84. Die weiteren Relationen $\mathfrak{S}\mathfrak{U}_1 \neq \mathfrak{U}\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}\mathfrak{V}_1 \neq \mathfrak{V}\mathfrak{D}$ werden nicht zu Identitäten, vielmehr sind die in §§ 53, 58 angegebenen *hinreichenden* Bedingungen, $\mathfrak{S}A \in A$ resp. $\mathfrak{D}A \in A$, hier auch *notwendig* dafür, daß die Subsumption in die Gleichheit übergeht. Beachten wir, um das einzusehen, zunächst, daß stets $\alpha \in \mathfrak{U}\alpha$ und $\alpha \in \mathfrak{V}\alpha$ ist. Aus $\mathfrak{S}\mathfrak{U}_1 A = \mathfrak{U}\mathfrak{S}A$ folgt daher $\mathfrak{S}A \in \mathfrak{S}\mathfrak{U}_1 A$, und das besagt nach V und VII: $\mathfrak{S}A \in \mathfrak{U}\xi$, $\xi \in A$. Von diesen Aussagen behauptet die erste: $\mathfrak{S}A \neq \xi$, aus der zweiten schließen wir nach VIIIc: $\xi \neq \mathfrak{S}A$, womit $\mathfrak{S}A = \xi \in A$ folgt.

Ebenso folgt aus $\mathfrak{S}\mathfrak{V}_1 A = \mathfrak{V}\mathfrak{D}A$: $\mathfrak{D}A \in \mathfrak{S}\mathfrak{V}_1 A$ und definitionsgemäß: $\mathfrak{D}A \in \mathfrak{V}\xi, \xi \in A$, woraus wir $\xi \neq \mathfrak{D}A, \mathfrak{D}A \neq \xi$, also $\mathfrak{D}A = \xi \in A$ schließen.

85. Unter den sechzehn gekennzeichneten Relationen befinden sich noch $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1 \neq \mathfrak{S}\mathfrak{S}$ (XXVa für $\mathfrak{Z} = \mathfrak{S}$) und $\mathfrak{D}\mathfrak{S} \neq \mathfrak{D}\mathfrak{D}_1\mathfrak{N}$ (XXVIa′ für $\mathfrak{T} = \mathfrak{D}$). Analog wie in § 63 die erste von diesen wollen wir hier auch die zweite umkehren. Aus $\mathfrak{J} \neq \mathfrak{V}\mathfrak{D}$ folgt $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{S}\mathfrak{V}_1\mathfrak{D}_1$ und da $\mathfrak{V}$ nullregulär*), nach XXVIb ohne Einschränkung: $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{V}\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$; hieraus für nicht verschwindendes Argument (IXd, XVIb):

$$\mathfrak{D}\mathfrak{V}\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}\mathfrak{D}_1 \neq \mathfrak{D}\mathfrak{S},$$

insbesondere also $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1\mathfrak{N} \neq \mathfrak{D}\mathfrak{S}\mathfrak{N} = \mathfrak{D}\mathfrak{S}$ und mit der genannten Umkehrung, wie verlangt:

(XXVIIIb) $$\mathfrak{D}\mathfrak{S} = \mathfrak{D}\mathfrak{D}_1\mathfrak{N}.$$

86. Die Formeln XXVIIIa und b haben die gemeinsame Form:

(XXVIIIc) $$\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1\mathfrak{N} = \mathfrak{F}\mathfrak{S} \quad (\mathfrak{F} = \mathfrak{S} \text{ oder } \mathfrak{D}),$$

aus der wir eine für die späteren Entwicklungen wichtige Folgerung ziehen. Die homöotone Funktion $\mathfrak{Z} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ genügt nämlich der Identität:

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}, \text{ d. h. } \mathfrak{F}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U}\mathfrak{F}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U}, \quad (\mathfrak{F} = \mathfrak{S} \text{ oder } \mathfrak{D}).$$

---

*) Ist **A** das Argument von $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$, so kann als verstecktes Argument von $\mathfrak{V}$ $\mathfrak{S}\mathfrak{S}$**A** benutzt werden.

Ein gleiches gilt für $\mathfrak{F}_1\mathfrak{U}$; die Nullausschließung ist aber für spätere Zwecke wichtig.

Wir vertauschen in $\mathfrak{F}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U}\mathfrak{F}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ das zweite $\mathfrak{F}_1$ mit dem vorangehenden $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{N}$ nach XXIXb und XXXIIa. Sodann das zweite $\mathfrak{N}$ mit dem vorangehenden $\mathfrak{U}$ nach XXXc. Wir erhalten dadurch $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{N}\mathfrak{N}_1\mathfrak{U}\mathfrak{U}$, wofür wir nach XXXIb noch $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}\mathfrak{N}_1\mathfrak{U}\mathfrak{U}$ setzen können. Nach XXVIIIc ist dieser Ausdruck gleich $\mathfrak{F}_1\mathfrak{S}_1\mathfrak{N}\mathfrak{N}_1\mathfrak{U}\mathfrak{U}$, und wenn wir nach XXXIIc $\mathfrak{S}_1$ mit den beiden $\mathfrak{N}$ vertauschen und XXVc beachten, so erhalten wir $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}$ $= \mathfrak{F}_1\mathfrak{N}\mathfrak{S}_1\mathfrak{U}\mathfrak{U} \subsetneqq \mathfrak{F}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U}\mathfrak{S}\mathfrak{U} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U} = \mathfrak{Z}$.

Diese Subsumption ist leicht umzukehren. Es ist nämlich $\mathfrak{E}_1 \subsetneqq \mathfrak{N}\mathfrak{U}$ (XXc, unter Beachtung, daß $\mathfrak{E}_1 A$ kein leeres Element enthält), also $\mathfrak{F}_1\mathfrak{E}_1 \subsetneqq \mathfrak{F}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U} = \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{F}_1\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{J}$ (XIV und XV), daher $\mathfrak{Z}\mathfrak{J} = \mathfrak{Z} \subsetneqq \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}$. Hiermit ist unsere Behauptung in vollem Umfange erwiesen.

87. Von den beiden soeben betrachteten Funktionen genügt die zweite nach (XXVIc) der Bedingung

(XXXIVa) $$\mathfrak{D}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U} \subsetneqq \mathfrak{V}\mathfrak{D}.$$

Für $\mathfrak{S}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ finden wir zwar nach (XXVc) sogleich $\mathfrak{S}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U} \subsetneqq \mathfrak{S}_1\mathfrak{U}$ $\subsetneqq \mathfrak{U}\mathfrak{S}$, doch wollen wir diese noch etwas verschärfen. Es wird $\mathfrak{S}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U}\mathfrak{N}$ $= \mathfrak{S}_1\mathfrak{N}\mathfrak{N}_1\mathfrak{U} = \mathfrak{N}\mathfrak{S}_1\mathfrak{U}$ und mit XXVc:

(XXXIVb) $$\mathfrak{S}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U}\mathfrak{N} \subsetneqq \mathfrak{N}\mathfrak{U}\mathfrak{S}.$$

Argument von $\mathfrak{S}_1$ kann nur eine Menge von dritter, Argument von $\mathfrak{S}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ daher nur eine Menge A von zweiter Stufe sein. Ist $B \varepsilon \mathfrak{N}\mathfrak{U}A$ d. h. $B \subsetneqq A$ und von Null verschieden, so wird:

$$\mathfrak{D}A \subsetneqq \mathfrak{D}B \subsetneqq \mathfrak{S}B \subsetneqq \mathfrak{S}A,$$

daher:

(XXXIV) $$\mathfrak{S}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U}A \subsetneqq \mathfrak{U}(\mathfrak{D}A, \mathfrak{S}A) \text{ und } \mathfrak{D}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U}A \subsetneqq \mathfrak{U}(\mathfrak{D}A, \mathfrak{S}A).$$

Hieraus entnehmen wir noch:

(XXXIVc) $$\mathfrak{S}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U} \subsetneqq \mathfrak{V}\mathfrak{D},$$

(XXXIVd) $$\mathfrak{D}_1\mathfrak{U} \neq \mathfrak{U}\mathfrak{S},$$

wobei in der ersten das versteckte Argument von $\mathfrak{V}$ die Vereinigung $\mathfrak{S}A$ des offenen umfassen muß.

88. Endlich betrachten wir noch die Funktion $\mathfrak{C}\alpha = \mu - \alpha$ für festes μ, d. h. das Komplement von α (in bezug auf μ). Sie ist antiton, es gilt also nach XXVIa, b

$$\mathfrak{S}\mathfrak{C}_1 \neq \mathfrak{C}\mathfrak{D}, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{S} \neq \mathfrak{D}\mathfrak{C}_1,$$

und zwar ohne Beschränkung, da $\mathfrak{C}$ nullregulär ist. Ferner ist $\mathfrak{C}\mathfrak{C} = \mathfrak{J}$, also auch $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{J}_1$. Wir schließen aus der ersten Relation, indem wir $\mathfrak{C}$ vorsetzen und die Subsumption umkehren, außerdem $\mathfrak{C}_1$ anfügen:

$$\mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{C}_1 \neq \mathfrak{C}\mathfrak{S}\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_1, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{D}\mathfrak{C}_1 \neq \mathfrak{C}\mathfrak{S}.$$

Analog aus der zweiten:

$$\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_1 \neq \mathfrak{C}\mathfrak{C}\mathfrak{S}\mathfrak{C}_1, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{C}\mathfrak{D} \neq \mathfrak{S}\mathfrak{C}_1.$$

Es gelten also die Identitäten

(XXXV) $$\mathfrak{S}\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}\mathfrak{D}, \quad \mathfrak{D}\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}\mathfrak{S}.$$

89. Analog folgern wir aus $\mathfrak{C}_1\mathfrak{U} \neq \mathfrak{V}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1\mathfrak{V} \neq \mathfrak{U}\mathfrak{C}$:

$$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{U}\mathfrak{C} \neq \mathfrak{C}_1\mathfrak{V}\mathfrak{C}\mathfrak{C}, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{U}\mathfrak{C} \neq \mathfrak{C}_1\mathfrak{V}$$

und

$$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{V}\mathfrak{C} \neq \mathfrak{C}_1\mathfrak{U}\mathfrak{C}\mathfrak{C}, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{V}\mathfrak{C} \neq \mathfrak{C}_1\mathfrak{U}.$$

Es gelten also auch an Stelle von XXVIc und d die Identitäten:

(XXXVI) $$\mathfrak{C}_1\mathfrak{U} = \mathfrak{V}\mathfrak{C}, \quad \mathfrak{C}_1\mathfrak{V} = \mathfrak{U}\mathfrak{C}.$$

Alle diese Folgerungen fließen allein aus der zu der Antitonie hinzutretenden Relation $\mathfrak{C}\mathfrak{C} = \mathfrak{J}$.

IX. *Ketten.*

90. Es sei $\mathfrak{Z}$ eine homöotone Funktion. Dann bezeichnen wir als „$\mathfrak{Z}$-*Ketten*“ diejenigen Argumente von $\mathfrak{Z}$, die ihre zugehörigen Funktionswerte umfassen:

$$\mathfrak{Z}\alpha \subseteq \alpha.$$

Für Aussonderungsfunktionen ist jedes Argument eine Kette. Die Funktion $\mathfrak{U}$ wiederum besitzt keine Ketten. Das Axiom des Unendlichen fordert die Existenz einer die Null enthaltenden $\mathfrak{E}_1$-Kette.

Ist die „*Kettenfunktion*“ $\mathfrak{Z}$ nur homöoton, so nennen wir die zugehörigen Ketten „*Zermelo*sche Ketten“. Ist $\mathfrak{Z}$ auch noch distributiv, so nennen wir die $\mathfrak{Z}$-Ketten „*Dedekind*sche Ketten“. Die beiden speziellen, von diesen Autoren untersuchten Kettenbildungen sind nämlich die wichtigsten Typen der beiden soeben unterschiedenen Klassen.

91. XXXVII. *Sind sämtliche Elemente einer Menge A $\mathfrak{Z}$-Ketten, so ist auch ihr Durchschnitt eine $\mathfrak{Z}$-Kette (Durchschnittssatz).*

Es wird, da A nicht leer ist, nach XXV b:

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{D}A \subseteq \mathfrak{D}\mathfrak{Z}_1 A$$

und da für alle $\alpha \varepsilon A$ $\mathfrak{Z}\alpha \subseteq \alpha$ gilt, $\mathfrak{D}\mathfrak{Z}_1 A \subseteq \mathfrak{D}A$, also

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{D}A \subseteq \mathfrak{D}A,$$

wie behauptet war.

92. XXXVIII. *Sind sämtliche Elemente einer Menge $\mathfrak{Z}$-Ketten und ist $\mathfrak{Z}$ distributiv, so ist auch ihre Summe eine $\mathfrak{Z}$-Kette (Summensatz).*

Es wird, wie oben, mit $\mathfrak{Z}\alpha \subseteq \alpha$ für jedes $\alpha \varepsilon A$ auch

$$\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1 A \subseteq \mathfrak{S}A,$$

und da $\mathfrak{Z}$ distributiv sein soll, die linke Seite zu $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}A$.

93. XXXIX. *Ist α Untermenge einer $\mathfrak{Z}$-Kette β, so gibt es eine „kleinste“ α umfassende $\mathfrak{Z}$-Kette α_0 (Kettensatz).*

D. h. es ist $\mathfrak{Z}\alpha_0 \subseteq \alpha_0$, $\alpha \subseteq \alpha_0$, und aus $\mathfrak{Z}\gamma \subseteq \gamma$, $\alpha \subseteq \gamma$ folgt $\alpha_0 \subseteq \gamma$.

Die Aussage $\mathfrak{Z}\xi \subseteq \xi$ definiert eine Untermenge B von $\mathfrak{U}(\alpha, \beta)$, die aus allen $\mathfrak{Z}$-Ketten von $\mathfrak{U}(\alpha, \beta)$ besteht. Da β selbst eine $\mathfrak{Z}$-Kette ist,

ist B nicht leer und $\mathfrak{D}B=\alpha_0$ wieder eine $\mathfrak{Z}$-Kette, $\alpha \subseteq \alpha_0 \subseteq \beta$. Von allen $\mathfrak{Z}$-Ketten, die den Bedingungen $\alpha \subseteq \gamma \subseteq \beta$ genügen, ist α_0 die kleinste. Es kommt noch darauf an, daß wir uns von der Bedingung $\gamma \subseteq \beta$ befreien.

Ist γ irgend eine $\mathfrak{Z}$-Kette, so gilt das gleiche von $\mathfrak{D}\{\alpha_0, \gamma\}=\alpha_0'$. Ist auch $\alpha \subseteq \gamma$, so wird $\alpha \subseteq \alpha_0'$. Da ferner $\alpha_0' \subseteq \alpha_0 \subseteq \beta$, ist $\alpha_0' \varepsilon B$, also $\alpha_0 \subseteq \alpha_0'$, d. h. $\alpha_0'=\alpha_0$. Daraus folgt sofort $\alpha_0 \subseteq \gamma$, wie behauptet war.

Die „*kleinste*“ $\mathfrak{Z}$-Kette von α ist größter gemeinsamer Bestandteil *aller* α umfassenden $\mathfrak{Z}$-Ketten. Diese Eigenschaft kann nicht, wie es früher vielfach geschah, zur Definition von α_0 verwandt werden, da die Klasse aller $\mathfrak{Z}$-Ketten keine *Menge* zu sein braucht. Daß diese α umfassenden $\mathfrak{Z}$-Ketten einen „Durchschnitt“ α_0 besitzen, muß daher besonders bewiesen werden.

An einem speziellen Beispiel, nämlich an der kleinsten, die Null enthaltenden $\mathfrak{E}_1$-Kette, findet sich diese Betrachtung bei *Zermelo*, Grundl. d. M., S. 280f durchgeführt.

94. Es sei μ eine $\mathfrak{Z}$-Kette und M die Menge aller in $\mathfrak{U}\mu$ enthaltenen, d. h. von μ umfaßten $\mathfrak{Z}$-Ketten. Dann enthält nach dem Durchschnittssatz M den Kern $\mathfrak{D}M'$ jeder nicht leeren Untermenge $M' \subseteq M$. Diese Kerne bilden die Menge $\mathfrak{D}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U}M$, es wird also

$$\mathfrak{D}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U}M \subseteq M,$$

d. h. M ist eine $\mathfrak{D}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U}$-Kette. Außerdem ist noch $\mathfrak{S}M \varepsilon M$.

Ist $\mathfrak{Z}$ distributiv, so wird nach dem Vereinigungssatz auch

$$\mathfrak{S}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U}M \subseteq M$$

und damit

$$(\mathfrak{S}_1+\mathfrak{D}_1)\mathfrak{N}\mathfrak{U}M \subseteq M^*).$$

Solche Mengen, die Kern und Vereinigung jeder ihrer nichtleeren Untermengen enthalten, nennen wir „*abgeschlossen*“, da $\mathfrak{S}A$ und $\mathfrak{D}A$ die Rolle von Grenzelementen im Sinne der Subsumption spielen.

95. Es sei nun umgekehrt eine $\mathfrak{D}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U}$-Kette M gegeben, die ein „*größtes*“ Element $\mu=\mathfrak{S}M$ enthält. Ist dann α Element von $\mathfrak{U}\mu$, so gibt

*) Die Nullausschließung kann dann und nur dann fortfallen, wenn $\mathfrak{Z}\,0=0$ d. h. die Null selbst Kette ist.

es in M ein kleinstes Element $\mathfrak{Z}\alpha$, welches α umfaßt. Denn der Durchschnitt aller solcher $\beta \varepsilon M$, die α umfassen, umfaßt selbst α und ist nach Voraussetzung in M enthalten*).

Im allgemeinen ist $\alpha \neqq \mathfrak{Z}\alpha$; nur für die Elemente von M, und für diese stets, wird $\alpha = \mathfrak{Z}\alpha$. $\mathfrak{Z}$ ist homöoton. Setzen wir nämlich $\mathfrak{V}\alpha = \mathfrak{U}(\alpha, \mu)$ und $\mathfrak{M}A = \mathfrak{D}\{A, M\}$, so ist $\mathfrak{Z}$ definiert als

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{D}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{V},$$

und hierin sind $\mathfrak{D}, \mathfrak{V}$ antiton, $\mathfrak{M}$ homöoton (als Aussonderungsfunktion). *Hiermit haben wir für das Feld* $\mathfrak{US}M$ *eine Funktion definiert, die genau alle Elemente von* M *zu Ketten hat.* Ihr Wert ist gerade die kleinste Kette, die das Argument umfaßt. Dies spricht sich in den Eigenschaften

$$\mathfrak{J} \neqq \mathfrak{Z} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Z}\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}$$

aus. Denn ist $\alpha \neqq \beta$ und $\mathfrak{Z}\beta \neqq \beta$, so wird auf Grund der Homöotonie $\mathfrak{Z}\alpha \neqq \mathfrak{Z}\beta \neqq \beta$, d. h. $\mathfrak{Z}\alpha$ wird von jeder $\mathfrak{Z}$-Kette umfaßt, die Übermenge von α ist. Wegen $\mathfrak{J} \neqq \mathfrak{Z}$ wird zweitens α von $\mathfrak{Z}\alpha$ umfaßt und drittens wird $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}\alpha = \mathfrak{Z}\alpha$, d. h. $\mathfrak{Z}\alpha$ eine $\mathfrak{Z}$-Kette.

96. Aus $\mathfrak{J} \neqq \mathfrak{Z}$ folgt $\mathfrak{S}A \neqq \mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1 A \neqq \mathfrak{Z}\mathfrak{S}A$. Ist nun M abgeschlossen, so ist auch $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1 A \varepsilon M$, denn es wird $\mathfrak{Z}\alpha \varepsilon M$, also $\mathfrak{Z}_1 A \neqq M$ und M enthält $\mathfrak{S}M'$ für jedes $M' \neqq M$. Demnach ist $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1 A$ Kette und umfaßt $\mathfrak{S}A$, daher auch $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}A$; da $\mathfrak{Z}$ homöoton ist, wird somit $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}\mathfrak{S}$, d. h. $\mathfrak{Z}$ ist *distributiv.*

Jede abgeschlossene Menge läßt sich also als eine Menge Dedekindscher Ketten auffassen.

97. Das einfachste Beispiel einer abgeschlossenen Menge ist $\mathfrak{U}(\alpha, \beta)$. Denn setzen wir in XXXIV $A = \mathfrak{U}(\alpha, \beta)$, so wird $\mathfrak{D}A = \alpha$, $\mathfrak{S}A \doteq \beta$ und

$$\mathfrak{F}_1 \mathfrak{M}\mathfrak{U}\mathfrak{U}(\alpha, \beta) \neqq \mathfrak{U}(\alpha, \beta)$$

für $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{D}$. Dies gilt auch für $\alpha = 0$**), d. h. für Potenzmengen.

---

*) Da jedenfalls $\alpha \neqq \mu \varepsilon M$, ist die Menge aller $\beta \varepsilon M$, $\alpha \neqq \beta$ nicht leer.

**) Ausgeschlossen war in § 87 nur $A = 0$; $\mathfrak{U}(\alpha, \beta)$ ist aber niemals leer, wenn $\alpha \neqq \beta$, und dieser Fall kommt allein in Betracht.

98. Jede Menge zweiter Stufe ist Untermenge einer Potenzmenge, $M \neq \mathfrak{U}\mathfrak{S}M$. Nach dem Kettensatz gibt es also je eine kleinste $\mathfrak{D}_1\mathfrak{M}\mathfrak{U}$- und $\mathfrak{S}_1\mathfrak{M}\mathfrak{U}$-Kette, die M umfaßt. Diese Ketten sind $\mathfrak{D}_1\mathfrak{M}\mathfrak{U}M$ und $\mathfrak{S}_1\mathfrak{M}\mathfrak{U}M$ selbst, da nach § 86 $\mathfrak{F}_1\mathfrak{U}\mathfrak{N}$ (für $\mathfrak{F}=\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{S}$) den Anforderungen $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Y} \neq \mathfrak{Z}$ genügt.

99. Ferner besitzt, aus den gleichen Gründen, M eine kleinste abgeschlossene Übermenge. Die Funktion $(\mathfrak{D}_1+\mathfrak{S}_1)\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ genügt indessen der Anforderung $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}$ nicht. Durch Hinzufügung der Kerne aller Untermengen von M erhält man also eine Menge, die die Kerne, durch Hinzufügen der Vereinigungen eine, die die Vereinigungen aller ihrer Untermengen enthält. Durch Hinzufügen von beiden entsteht dagegen eine Menge, die weder die Kerne noch die Vereinigungen aller ihrer Untermengen zu enthalten braucht.

X. *Äquivalente Kettenfunktionen.*

100. Wenn $\mathfrak{Y} \neq \mathfrak{Z}$, d. h. $\mathfrak{Z}$ Majorante von $\mathfrak{Y}$ ist, so ist jede $\mathfrak{Z}$-Kette eine $\mathfrak{Y}$-Kette. Daher ist jede $(\mathfrak{X}+\mathfrak{Y})$-Kette zugleich eine $\mathfrak{X}$- und eine $\mathfrak{Y}$-Kette, und umgekehrt: Jede Kette, die zugleich $\mathfrak{X}$- und $\mathfrak{Y}$-Kette ist, ist eine $(\mathfrak{X}+\mathfrak{Y})$-Kette. Davon machten wir bereits bei den abgeschlossenen Mengen Gebrauch. (§ 99).

101. Wenn zwei Funktionen dieselben Ketten besitzen, so nennen wir sie „*äquivalent*“. Sind alle $\mathfrak{Z}$-Ketten zugleich $\mathfrak{Y}$-Ketten (nicht notwendig umgekehrt), so ist $\mathfrak{Z}+\mathfrak{Y}$ zu $\mathfrak{Z}$ äquivalent. Dies tritt im besonderen ein, wenn $\mathfrak{Y}$ zu $\mathfrak{Z}$ äquivalent ist, ferner für $\mathfrak{Y} \neq \mathfrak{J}$, da alsdann jede Menge eine $\mathfrak{Y}$-Kette ist. Wenn $\mathfrak{Y} \neq \mathfrak{Z}$, wird ebenfalls $\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}$ zu $\mathfrak{Z}$ äquivalent, doch ist dieser Fall trivial, da $\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}$ wird.

102. Ist $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{Y} \neq \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{X}$ mit $\mathfrak{Z}$ äquivalent, so ist auch $\mathfrak{Y}$ mit $\mathfrak{Z}$ äquivalent. Denn alle $\mathfrak{Z}$-Ketten sind $\mathfrak{Y}$-Ketten und alle $\mathfrak{Y}$-Ketten sind $\mathfrak{X}$- und damit $\mathfrak{Z}$-Ketten.

103. Im besonderen ist $\mathfrak{Z}'=\mathfrak{Z}+\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{Z}$ äquivalent, und es genügt $\mathfrak{Z}'$ der Bedingung $\mathfrak{J} \neq \mathfrak{Z}'$, d. h. für jedes α ist:

$$\alpha \neq \mathfrak{Z}'\alpha, \text{ für eine Kette } \mathfrak{Z}'\alpha=\alpha.$$

Ist $\mathfrak{Z}$ distributiv, $\mathfrak{Z} = \mathfrak{S}\mathfrak{F}_1$, so wird $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{S}\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{S}\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{S}(\mathfrak{F}+\mathfrak{E})_1$ (XIX), also ebenfalls distributiv. $\mathfrak{F}+\mathfrak{E}=\mathfrak{F}'$ genügt der Bedingung $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{F}'$, d. h. $a \varepsilon \mathfrak{F}'a$ für jedes Argument.

Es kann also ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß die Kettenfunktion Majorante von $\mathfrak{Z}$ *ist, und die Kettenbedingung* $\alpha = \mathfrak{Z}\alpha$ *lautet, insbesondere, wenn* $\mathfrak{Z}$ *distributiv, daß* $\mathfrak{Z} = \mathfrak{S}\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}$ *Majorante von* $\mathfrak{E}$ *ist.*

Für distributives $\mathfrak{Z}$ ist das Kriterium der Kette dieses, daß α zu jedem seiner Elemente a das zugehörige $\mathfrak{F}a$ umfasse.

104. Es bezeichne $\mathfrak{Z}_0\alpha$ die kleinste α umfassende $\mathfrak{Z}$-Kette. Dann ist jedenfalls

$$\mathfrak{Z} \neq \mathfrak{Z}_0. \tag{1}$$

Da jeder Wert von $\mathfrak{Z}_0$ eine $\mathfrak{Z}$-Kette ist, wird $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}_0 \neq \mathfrak{Z}_0$, also nach (1) $\mathfrak{Z} \neq \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}_0 \neq \mathfrak{Z}_0$, d. h. $\mathfrak{Z}_0$ ist Majorante von $\mathfrak{Z}$, *infolgedessen auch Majorante jeder zu* $\mathfrak{Z}$ *äquivalenten Funktion.* Alle $\mathfrak{Z}_0$-Ketten sind somit $\mathfrak{Z}$-Ketten. Aber auch eine $\mathfrak{Z}$-Kette α ist $\mathfrak{Z}_0$-Kette, denn sie ist ja die kleinste, α umfassende $\mathfrak{Z}$-Kette $\mathfrak{Z}_0\alpha$ selbst. Endlich ist $\mathfrak{Z}_0$ homöoton. Denn aus $\alpha \neq \beta$ folgt nach (1) $\alpha \neq \mathfrak{Z}_0\beta$, und da $\mathfrak{Z}_0\beta$ eine $\mathfrak{Z}$-Kette ist: $\mathfrak{Z}_0\alpha \neq \mathfrak{Z}_0\beta$.

105. $\mathfrak{Z}$ ist die größte, zu $\mathfrak{Z}$ äquivalente Kettenfunktion und unter allen zu $\mathfrak{Z}$ äquivalenten ausgezeichnet durch die Eigenschaften (1) und $\mathfrak{Z}_0\mathfrak{Z}_0 \neq \mathfrak{Z}_0$ (2), wofür wegen (1) $\mathfrak{Z}_0\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{Z}_0$ geschrieben werden kann. Ist α_0 die kleinste, α umfassende $\mathfrak{Z}$-Kette, so wird auf Grund der Homöotonie aus $\alpha \neq \alpha_0$: $\mathfrak{Z}_0\alpha \neq \mathfrak{Z}_0\alpha_0$, auf Grund der Äquivalenz $\mathfrak{Z}_0\alpha_0 \neq \alpha_0$, also $\mathfrak{Z}_0\alpha \neq \alpha_0$. Auf Grund von (2) ist aber $\mathfrak{Z}_0\alpha$ eine $\mathfrak{Z}_0$-, also eine $\mathfrak{Z}$-Kette, die wegen (1) α, also auch α_0 umfaßt: $\alpha_0 \neq \mathfrak{Z}_0\alpha$. Damit folgt $\mathfrak{Z}_0\alpha = \alpha_0$, wie behauptet war.

106. (XL.) *Wenn* $\mathfrak{Y} \neq \mathfrak{Z}$, *so ist auch* $\mathfrak{Y}_0 \neq \mathfrak{Z}_0$. Denn $\mathfrak{Z}_0\alpha$ wird eine α umfassende $\mathfrak{Z}$-, also auch $\mathfrak{Y}$-Kette. Ist umgekehrt $\mathfrak{Y}_0 \neq \mathfrak{Z}_0$, so ist zwar nicht notwendig $\mathfrak{Y} \neq \mathfrak{Z}$, wohl aber $\mathfrak{Y} \neq \mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}$ zu $\mathfrak{Z}$ äquivalent.

107. (XLI.) *Ist* $\mathfrak{Z}$ *distributiv, so auch* $\mathfrak{Z}_0$. Denn es ist nach (1) jedenfalls $\mathfrak{S}A = \mathfrak{S}\mathfrak{F}_1 A \neq \mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{01}A$, nach dem Summensatz aber $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{01}A$ als Summe aller $\mathfrak{Z}$-Ketten $\mathfrak{Z}_0\alpha$, $\alpha \varepsilon A$ eine $\mathfrak{Z}$- und damit $\mathfrak{Z}_0$-Kette; daher ist $\mathfrak{Z}_0\mathfrak{S}A \neq \mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{01}A$, wie behauptet war.

Es wird hiernach noch $\mathfrak{Z}_0\alpha = \mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{01}\mathfrak{E}_1\alpha$, d. h. die kleinste, α umfassende Kette ist Summe aller derjenigen kleinsten Ketten $\mathfrak{Z}_0\mathfrak{E}a$, die je ein Element

$a \varepsilon a$ enthalten. Da die Funktion $\mathfrak{Z}_0 \mathfrak{E}$ im folgenden wiederholt auftritt, wollen wir sie kurz mit $\mathfrak{Z}_e$ bezeichnen. $\mathfrak{Z}_e a$ ist also die kleinste $\mathfrak{Z}$-Kette, die a enthält. Aus $\mathfrak{Y} \neq \mathfrak{Z}$ folgt wie oben $\mathfrak{Y}_e \neq \mathfrak{Z}_e$*).

108. Die Funktion $\mathfrak{Z}_0$ ist dieselbe, die wir in § 95 zu der $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{N} \mathfrak{U}$-Kette konstruierten. Ferner sind, wie wir sahen, $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{N} \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{N} \mathfrak{U}$ die größten unter allen zu ihnen äquivalenten Funktionen, da sie den Bedingungen (1., 2.) der §§ 104flgd. genügen.

109. Wir betrachten nunmehr die Beziehungen zwischen den $\mathfrak{Z}_1$- und den $\mathfrak{Z}$-Ketten und überzeugen uns zu diesem Zwecke kurz, daß es $\mathfrak{Z}_1$-Ketten gibt, sofern es $\mathfrak{Z}$-Ketten gibt. Aus $\mathfrak{Z}\mu \neq \mu$ folgt in der Tat (XXVc) $\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{U} \mu \neq \mathfrak{U}\mathfrak{Z}\mu \neq \mathfrak{U}\mu$. Ist $\alpha \neq \mu$, so ist $\alpha \varepsilon \mathfrak{U}\mu$, es gibt also eine kleinste $\mathfrak{Z}_1$-Kette, die α *enthält*; wir haben sie mit $\mathfrak{Z}_{10} \mathfrak{E} \alpha$ oder kürzer $\mathfrak{Z}_{1e} \alpha$ zu bezeichnen. Da $\mathfrak{Z}_1$ als Bildfunktion distributiv ist, wird $\mathfrak{Z}_{10} = \mathfrak{S} \mathfrak{Z}_{1e1}$. Die Funktion $\mathfrak{Z}_{1e}$ ist durch folgende Eigenschaften eindeutig definiert:

(a) $\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_{1e} \alpha \neq \mathfrak{Z}_{1e} \alpha$

(b) $\alpha \varepsilon \mathfrak{Z}_{1e} \alpha$

(c) Aus $\alpha \varepsilon A, \mathfrak{Z}_1 A \neq A$ folgt $\mathfrak{Z}_{1e} \alpha \neq A$.

110. Der erste Satz, den wir beweisen, lautet:

XLII. $\mathfrak{S} \mathfrak{Z}_{1e}$ *ist zu* $\mathfrak{Z}$ *äquivalent.*

Wir erhalten nach XXVc und XXI: $\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{U} \neq \mathfrak{U}\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_2 \mathfrak{U}_1 \neq \mathfrak{S}\mathfrak{U}_1 \mathfrak{Z}_1$, und nach XXIXa: $\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{S}\mathfrak{U}_1 \neq \mathfrak{S}\mathfrak{U}_1 \mathfrak{Z}_1$, daher für das Argument $\mathfrak{Z}_{1e}\beta$ nach (a):

(d) $$\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{S}\mathfrak{U}_1 \mathfrak{Z}_{1e}\beta \neq \mathfrak{S}\mathfrak{U}_1 \mathfrak{Z}_{1e}\beta.$$

Aus $\alpha \neq \beta$ folgern wir $\alpha \varepsilon \mathfrak{U}\beta$, aus $\beta \varepsilon \mathfrak{Z}_{1e}\beta$: $\mathfrak{U}\beta \varepsilon \mathfrak{U}_1 \mathfrak{Z}_{1e}\beta$, also nach V:

(e) $$\alpha \varepsilon \mathfrak{S}\mathfrak{U}_1 \mathfrak{Z}_{1e}\beta.$$

Aus (d) und (e) nach (c):

$$\mathfrak{Z}_{1e}\alpha \neq \mathfrak{S}\mathfrak{U}_1 \mathfrak{Z}_{1e}\beta,$$

*) Die Indizes 0 und e müssen hinzugesetzt werden, da die Reihenfolge der Operationen wesentlich, z. B. $\mathfrak{Z}_{01}$ von $\mathfrak{Z}_{10}$ verschieden ist.

daraus nach VIIId, XXVIIIa und XVIa:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1e}\alpha \neq \mathfrak{S}\mathfrak{S}\mathfrak{U}_1\mathfrak{Z}_{1e}\beta = \mathfrak{S}\mathfrak{S}_1\mathfrak{U}_1\mathfrak{Z}_{1e}\beta = \mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1e}\beta.$$

Es ist also $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1e}$ *homöoton.*

111. Aus (b) und (a) folgt:

$$\mathfrak{Z}\alpha \in \mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_{1e}\alpha \neq \mathfrak{Z}_{1e}\alpha,\ \mathfrak{Z}\alpha \neq \mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1e}\alpha.$$

Da somit $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1e}\alpha$ **Majorante von** $\mathfrak{Z}$, *ist jede* $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1e}$*-Kette eine* $\mathfrak{Z}$*-Kette.*

Aus $\mathfrak{Z}\alpha \neq \alpha$ **folgt andererseits (§ 109)** $\mathfrak{Z}_1\mathfrak{U}\alpha \neq \mathfrak{U}\alpha$ **und mit** $\alpha \in \mathfrak{U}\alpha$ **nach (c):** $\mathfrak{Z}_{1e}\alpha \neq \mathfrak{U}\alpha$, **woraus**

$$\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1e}\alpha \neq \mathfrak{S}\mathfrak{U}\alpha = \alpha.$$

Also ist auch jede $\mathfrak{Z}$*-Kette eine* $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1e}$*-Kette*, **womit unsere Behauptung in vollem Umfange erwiesen ist.**

112. Wenn $\mathfrak{Z}$ **distributiv ist, wird** $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1e} = \mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_{1e} \neq \mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1e}$, **d. h. jeder Wert von** $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1e}$ **ist eine** $\mathfrak{Z}$**-Kette*). Es wird daher, auf Grund der bewiesenen Äquivalenz, da nach (b) bereits**

$$\mathfrak{J} \neq \mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1e}$$

gilt, auch $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1e}\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1e} = \mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1e}$, **d. h.** $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1e}$ **ist die kleinste, das Argument umfassende** $\mathfrak{Z}$**-Kette (§ 104flgd.):**

(XLIII.) $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1e} = \mathfrak{Z}_0$ **für distributives** $\mathfrak{Z}$.

113. Für einfach homöotones $\mathfrak{Z}$ **ist dieser Beweis nicht durchführbar; wir entsinnen uns indessen, daß auch in diesem Falle** $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1$ **gleich** $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}$ **werden kann, wenn nämlich das Argument ein größtes Element enthält. (§ 53.) Dieser Bedingung können wir genügen, wenn wir aus den** $\mathfrak{Z}_1$**-Ketten die** *abgeschlossenen* **Mengen aussuchen. Es bleibt daher zunächst die Frage, ob wir auf diesem Wege noch eine zu** $\mathfrak{Z}$ **äquivalente Kettenfunktion erhalten.**

---

*) Allgemeiner wird die Vereinigung jeder $\mathfrak{Z}_1$-Kette eine $\mathfrak{Z}$-Kette, denn aus $\mathfrak{Z}_1 A \neq A$ folgt $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}A = \mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1 A \neq \mathfrak{S}A$.

114. Wir bilden die Funktion $\mathfrak{Z}^* = \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{S}_1 \mathfrak{N} \mathfrak{U} + \mathfrak{D}_1 \mathfrak{N} \mathfrak{U}$, wobei es für unsere Zwecke genügen würde $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{S}_1 \mathfrak{N} \mathfrak{U}$ zu wählen. Die Betrachtung wird aber durch die Forderung der Abgeschlossenheit nicht komplizierter, die Ausdrucksweise eher einfacher.

Wie in § 110d schließen wir, daß mit $\mathfrak{Z}^*_e \beta$ auch $\mathfrak{S}\mathfrak{U}_1 \mathfrak{Z}^*_e \beta$ eine $\mathfrak{Z}_1$-Kette sein muß. Da weiterhin $\mathfrak{Z}^*_e \beta$ als abgeschlossene Menge ein größtes Element besitzt, wird (§ 53)

$$\mathfrak{S}\mathfrak{U}_1 \mathfrak{Z}^*_e \beta = \mathfrak{U} \mathfrak{S} \mathfrak{Z}^*_e \beta.$$

Da aber alle Potenzmengen abgeschlossen sind, folgt hieraus, daß $\mathfrak{S}\mathfrak{U}_1 \mathfrak{Z}^*_e \beta$ nicht nur eine $\mathfrak{Z}_1$-, sondern eine $\mathfrak{Z}^*$-Kette ist. Aus $\alpha \neq \beta$ folgt damit wörtlich wie oben $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}^*_e \alpha \neq \mathfrak{S}\mathfrak{Z}^*_e \beta$, d. h. $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}^*_e$ *ist homöoton.*

115. Mit $\mathfrak{Z}_1 \neq \mathfrak{Z}^*$ ist auch $\mathfrak{Z}_{1e} \neq \mathfrak{Z}^*_e$ (§ 107), $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1e} \neq \mathfrak{S}\mathfrak{Z}^*_e$, daher auch $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}^*_e$ Majorante von $\mathfrak{Z}$: *alle* $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}^*_e$*-Ketten sind* $\mathfrak{Z}$*-Ketten.*

Ist umgekehrt $\mathfrak{Z}\alpha \neq \alpha$, so ist, wie oben, $\mathfrak{U}\alpha$ eine $\mathfrak{Z}_1$-Kette, und zwar als Potenzmenge eine abgeschlossene, d. h. eine $\mathfrak{Z}^*$-Kette. Daher wird mit $\alpha \in \mathfrak{U}\alpha$ auch $\mathfrak{Z}^*_e \alpha \neq \mathfrak{U}\alpha$, $\mathfrak{S}^*_e \mathfrak{Z}\alpha \neq \alpha$: *Alle* $\mathfrak{Z}$*-Ketten sind auch* $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}^*_e$-Ketten.

Hiermit ist gezeigt, daß $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}^*_e$ mit $\mathfrak{Z}$ äquivalent ist.

116. Da die $\mathfrak{Z}^*$-Ketten abgeschlossen sind, ist für eine beliebige solche Kette A: $\mathfrak{S}A \in A$, daher (§ 53):

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{S}A = \mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1 A, \text{ zugleich aber } \mathfrak{S}\mathfrak{Z}_1 A \neq \mathfrak{S}A,$$

denn eine $\mathfrak{Z}^*$-Kette ist insbesondere eine $\mathfrak{Z}_1$-Kette. $\mathfrak{S}A$ aber ist hiernach eine $\mathfrak{Z}$-Kette. Daher sind alle Werte der Funktion $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}^*_e$ $\mathfrak{Z}$-Ketten, damit auf Grund der soeben bewiesenen Äquivalenz auch $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}^*_e$-Ketten, d. h. es wird $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}^*_e \mathfrak{S}\mathfrak{Z}^*_e \neq \mathfrak{S}\mathfrak{Z}^*_e$, und da mit $\alpha \in \mathfrak{Z}^*_e \alpha$ auch $\mathfrak{J} \neq \mathfrak{S}\mathfrak{Z}^*_e$ gilt, ist (§ 104 flgd.)

$$\text{(XLIV)} \qquad \mathfrak{S}\mathfrak{Z}^*_e = \mathfrak{S}(\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{S}_1 \mathfrak{N} \mathfrak{U} + \mathfrak{D}_1 \mathfrak{N} \mathfrak{U})_e = \mathfrak{Z}_0.$$

117. Wenn wir die Theorie der transfiniten Ordnungszahlen zu Hilfe nehmen, können wir diesen Ergebnissen folgende Deutung unterlegen, bei der wir gemäß § 103 annehmen, daß $\mathfrak{J} \neq \mathfrak{Z}$ gelten soll:

$\mathfrak{Z}_0 \alpha$ umfaßt mit α auch $\mathfrak{Z}\alpha$, daher weiter $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}\alpha = \mathfrak{Z}^2 \alpha$, $\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}^n = \mathfrak{Z}^{n+1} \alpha$ usf., daher auch die Summe $\mathfrak{Z}^\omega \alpha$ aller $\mathfrak{Z}^n \alpha$ mit endlichem Index, weiterhin

allgemein $\mathfrak{Z}^{\lambda+1}\alpha = \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}^{\lambda}\alpha$ und $\mathfrak{Z}^{\lim\lambda}\alpha = \mathfrak{S}_{\lambda}\{\mathfrak{Z}^{\lambda}\alpha\}$ für irgend welche transfinite Ordnungszahl λ. Da alle diese $\mathfrak{Z}^{\lambda}\alpha$ in $\mathfrak{U}\,\mathfrak{Z}_0\alpha$ enthalten sind, diese Menge aber nach dem Satze von *Zermelo* einer Wohlordnung fähig ist, so können die Exponenten λ, für die $\mathfrak{Z}^{\lambda+1}\alpha$ „*größer*" als $\mathfrak{Z}^{\lambda}\alpha$ ausfällt, die Anfangszahl der nächsthöheren Mächtigkeit von $\mathfrak{U}\,\mathfrak{Z}_0\alpha$ nicht übersteigen, es muß vielmehr für eine Ordnungszahl des Alef von $\mathfrak{U}\,\mathfrak{Z}_0\alpha$ oder eines früheren einmal $\mathfrak{Z}^{\lambda+1}\alpha = \mathfrak{Z}^{\lambda}\alpha$ werden, womit auch $\mathfrak{Z}^{\lambda+\mu}\alpha = \mathfrak{Z}^{\lambda}\alpha$ wird. Die *erste* Ordnungszahl $\varkappa$, für die dies eintritt, liefert in $\mathfrak{Z}^{\varkappa}\alpha$ die kleinste, α umfassende $\mathfrak{Z}$-Kette.

Die Reihe $\alpha, \mathfrak{Z}\alpha, \mathfrak{Z}^2\alpha \ldots \mathfrak{Z}^{\omega}\alpha \ldots \mathfrak{Z}^{\varkappa}\alpha$ ist, wie aus ihrer Wohlordnung folgt, eine abgeschlossene Menge; ihre Summe ist $\mathfrak{Z}^{\varkappa}\alpha$. Offenbar ist sie auch eine $\mathfrak{Z}_1$-Kette, und zwar die kleinste α enthaltende abgeschlossene, wie sich durch transfinite Induktion zeigen läßt.

118. Für distributives $\mathfrak{Z}$ genügt bereits die Bildung der kleinsten $\mathfrak{Z}_1$-Kette, die, wie aus der *Dedekind*schen Kettentheorie bekannt ist, aus den Gliedern

$$\alpha, \mathfrak{Z}\alpha, \mathfrak{Z}^2\alpha, \mathfrak{Z}^n\alpha \ldots$$

mit endlichem Exponenten besteht. In der Tat wird für ein distributives $\mathfrak{Z}$:

$$\mathfrak{Z}\{\alpha + \mathfrak{Z}\alpha + \cdots \mathfrak{Z}^n\alpha + \cdots\} = \mathfrak{Z}\alpha + \mathfrak{Z}^2\alpha + \cdots \mathfrak{Z}^n\alpha + \cdots \notin \alpha + \mathfrak{Z}\alpha + \mathfrak{Z}^2\alpha + \cdots \mathfrak{Z}^n\alpha + \cdots,$$

wobei wegen $\alpha \notin \mathfrak{Z}\alpha$: $\alpha + \mathfrak{Z}\alpha = \mathfrak{Z}\alpha$, also tatsächlich $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1e}\alpha = \mathfrak{S}\mathfrak{Z}_{1e}\alpha$ wird. Für distributives $\mathfrak{Z}$ bricht daher die Reihe $\mathfrak{Z}^{*}_{e}\alpha$ spätestens mit $\mathfrak{Z}^{\omega}\alpha$, möglicherweise auch schon für ein endliches n ab. Dies ist für distributives $\mathfrak{Z}$ *sicher*, damit aber für einfach homöotones *nicht ausgeschlossen*. So wird z. B. für die Funktion $\mathfrak{Z}_0$ bereits $\mathfrak{Z}_0^2\alpha = \mathfrak{Z}_0\alpha$, wie wir es im speziellen an den *nicht* distributiven $\mathfrak{S}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{D}_1\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ beobachteten.

Wir werden in Kapitel XIII die Wohlordnung von $\mathfrak{Z}^{*}_{e}\alpha$ beweisen, ohne von der Theorie der Ordnungszahlen Gebrauch zu machen.

XI. *Schnitte durch Subsumption.*

119. Wenn M eine Menge zweiter Stufe ist, so kann es vorkommen, daß zweigliedrige Zerlegungen $\{M_1, M_2\}$ von folgender Eigenschaft existieren: Ist $\alpha \varepsilon M_1$, $\beta \varepsilon M_2$, so ist stets

$$\alpha \notin \beta.$$

Eine solche Zerlegung wird ein „*Schnitt*“ genannt. Die charakteristische Eigenschaft eines Schnittes läßt sich auch durch die Relation

$$\mathfrak{S}M_1 \neq \mathfrak{D}M_2 \qquad \text{(S)}$$

aussprechen. Sind umgekehrt M_1, M_2 zwei elementenfremde Mengen, zwischen denen die Relation S besteht, so ist $\{M_1, M_2\}$ ein Schnitt von $M_1 + M_2$.

Der Relation S genügt auch der „*unechte*“ Schnitt $\{0, M\}$. Er wird je nach Bedürfnis ausgeschlossen oder mitgerechnet, in manchen Fällen rechnet man auch $\{M, 0\}$, d. h. $M = M_1$, $M_2 = 0$ mit zu den Schnitten, obschon hier nicht einmal S erfüllt ist.

120. Wenn weder $\mathfrak{S}M_1$ noch $\mathfrak{D}M_2$ der Menge M angehören, so wird der Schnitt M_1, M_2 eine „*Lücke*“ genannt. *In einer abgeschlossenen Menge können daher keine Lücken auftreten.* Ist M eine $\mathfrak{D}_1\mathfrak{M}\mathfrak{U}$-Kette, so kann nur der unechte Schnitt $\{M, 0\}$, ist es eine $\mathfrak{S}_1\mathfrak{M}\mathfrak{U}$-Kette, so nur $\{0, M\}$ eine Lücke sein.

121. XLV. *Ist* $\{M_1, M_2\} = \Sigma$ *ein echter Schnitt von* M, *so ist:*

$$\mathfrak{D}M_1 = \mathfrak{D}M, \quad \mathfrak{S}M_2 = \mathfrak{S}M,$$

wobei die erste Aussage für $M_2 = 0$, die zweite für $M_1 = 0$ trivial gültig bleibt. — Es wird nach XXVIIIa, b:

$$\mathfrak{D}M = \mathfrak{D}\mathfrak{S}\Sigma = \mathfrak{D}\mathfrak{D}_1\Sigma = \mathfrak{D}\{\mathfrak{D}M_1, \mathfrak{D}M_2\} = \mathfrak{D}M_1,$$
$$\mathfrak{D}M = \mathfrak{S}\mathfrak{S}\Sigma = \mathfrak{S}\mathfrak{S}_1\Sigma = \mathfrak{S}\{\mathfrak{S}M_1, \mathfrak{S}M_2\} = \mathfrak{S}M_2,$$

wenn jeweils beim letzten Schlusse: $\mathfrak{D}M_1 \neq \mathfrak{S}M_1 \neq \mathfrak{D}M_2 \neq \mathfrak{S}M_2$ beachtet wird. — Der Satz bleibt auch gültig, wenn $\mathfrak{S}M_1 = \mathfrak{D}M_2$ gemeinsames Element von M_1, M_2 wird. Denn von der Elementenfremdheit der Mengen M_1, M_2 wurde kein Gebrauch gemacht.

122. XLVI. *Sind* M_1, M_2 $\mathfrak{F}_1\mathfrak{M}\mathfrak{U}$-*Ketten*, $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}$ *oder* $\mathfrak{D}$, *und ist* $\mathfrak{S}M_1 \neq \mathfrak{D}M_2$, *so ist auch* $M_1 + M_2$ *eine* $\mathfrak{F}_1\mathfrak{M}\mathfrak{U}$-*Kette. Sind insbesondere* M_1, M_2 *abgeschlossen, so auch* $M_1 + M_2$. Ist nämlich $M' \neq M$, so $M' = M_1' + M_2'$, $M_1' \neq M_1$, $M_2' \neq M_2$, $\mathfrak{S}M_1' \neq \mathfrak{S}M_1 \neq \mathfrak{D}M_2 \neq \mathfrak{D}M_2'$, sofern beide nicht leer sind. Daher: $\mathfrak{D}M' = \mathfrak{D}M_1' \,\varepsilon\, M_1'$ und für leeres M_1': $\mathfrak{D}M' = \mathfrak{D}M_2' \,\varepsilon\, M_2'$. Ebenso: $\mathfrak{S}M' = \mathfrak{S}M_2' \,\varepsilon\, M_2'$ und für leeres M_2': $\mathfrak{S}M' = \mathfrak{S}M_1' \,\varepsilon\, M_1'$.

123. Wenn $M = M_1 + M_2$ und $\mathfrak{S}M_1 \notin \mathfrak{D}M_2$ ist, so braucht $\{M_1, M_2\}$ nicht notwendig ein Schnitt zu sein, da M_1, M_2 ein Element gemein haben können. Dieses ist dann gleich $\mathfrak{S}M_1$ und gleich $\mathfrak{D}M_2$, und es entstehen aus $\{M_1, M_2\}$ zwei Schnitte, je nachdem es in M_1 oder in M_2 getilgt wird. Ein solches Element von M wird ein Schnittelement genannt.

124. Jeder Menge σ, die der Bedingung

$$\text{(a)} \qquad M = M_1 + M_2, \ \mathfrak{S}M_1 \notin \sigma \notin \mathfrak{D}M_2$$

genügt, insbesondere jedem Schnittelement von M, kommt die Eigenschaft zu, daß jedes $\alpha \varepsilon M$ entweder Unter- oder Übermenge von σ ist. Trifft umgekehrt diese Eigenschaft zu, so ist entweder (a) erfüllt, oder aber, wenn nur Unter- oder nur Übermengen von σ in M enthalten sind, eine der folgenden beiden:

$$\sigma \notin \mathfrak{D}M, \ \mathfrak{S}M \notin \sigma.$$

125. Bezeichnet A_0 die kleinste abgeschlossene Übermenge von A, so ist $\mathfrak{D}A_0 = \mathfrak{D}A$, $\mathfrak{S}A_0 = \mathfrak{S}A$. Denn einerseits folgt aus $A \notin A_0$: $\mathfrak{D}A_0 \notin \mathfrak{D}A$, $\mathfrak{S}A \notin \mathfrak{S}A_0$. Andererseits ist $A' = \mathfrak{U}\{\mathfrak{D}A, \mathfrak{S}A\}$ abgeschlossene Übermenge von A, also $A_0 \notin A'$ und $\mathfrak{D}A = \mathfrak{D}A' \notin \mathfrak{D}A_0$, $\mathfrak{S}A_0 \notin \mathfrak{S}A = \mathfrak{S}A'$ (§ 42).

Ist $A \notin B$, so auch $A_0 \notin B_0$. Aus $M = M_1 + M_2$ folgt daher $M_{10} + M_{20} \notin M_0$. Ist $\mathfrak{S}M_1 \notin \sigma \notin \mathfrak{D}M_2$, so wird auch $\mathfrak{S}M_{10} \notin \sigma \notin \mathfrak{D}M_{20}$, also $M_{10} + M_{20}$ abgeschlossen. Als Übermenge von M muß es daher M_0 umfassen, d. h. es wird

$$M_0 = M_{10} + M_{20}, \quad \mathfrak{S}M_{10} \notin \sigma \notin \mathfrak{D}M_{20}.$$

Jedem Schnitt in M entspricht daher mindestens ein Schnitt in M_0, d. h. durch die „*Abschließung*“ von M gehen keine Schnitte verloren. Wir setzen daher weiterhin voraus, daß M abgeschlossen sei.

126. XLVII. *Die Menge aller Schnittelemente einer abgeschlossenen Menge ist selbst abgeschlossen*, d. h., besteht eine Untermenge S von M nur aus Schnittelementen, so sind auch $\mathfrak{D}S$ und $\mathfrak{S}S$ Schnittelemente.

Jedes $\xi \varepsilon M$ steht zu jedem $\alpha \varepsilon S$ in einer der Beziehungen $\alpha \notin \xi$ oder $\xi \notin \alpha$. Nach § 124 ist daher entweder $\xi \notin \mathfrak{D}S$ oder $\mathfrak{S}S \notin \xi$ (im ersten Fall auch $\xi \notin \mathfrak{S}S$, im zweiten auch $\mathfrak{D}S \notin \xi$), oder es ist

$$S = S_1 + S_2,\ \mathfrak{S}S_1 \neq \xi \neq \mathfrak{D}S_2.$$

Hieraus aber folgt nach XLV

$$\mathfrak{D}S = \mathfrak{D}S_1 \neq \mathfrak{S}S_1 \neq \xi \neq \mathfrak{D}S_2 \neq \mathfrak{S}S_2 = \mathfrak{S}S.$$

Auch zu $\mathfrak{D}S$ und $\mathfrak{S}S$ muß daher ξ in einer Subsumptionsbeziehung stehen, wie behauptet war.

XII. *Schnitte aus unsymmetrischen Relationen.*

127. Der Begriff des „Schnittes“ wird gewöhnlich nur auf geordnete Mengen angewandt, d. h. auf solche Mengen, zwischen deren Elementen eine Beziehung $x < y$ (x vor y) von folgenden Eigenschaften besteht:

1. Ist $x < y$, so ist nicht $y < x$ (Unsymmetrie).
2. Aus $x < y < z$ folgt $x < z$ (Transitivität).
3. Einer der drei Fälle $x < y$, $x = y$, $y < x$ muß stets zutreffen.

Hierzu kommt selbstverständlich die Forderung, daß die Aussage $x < y$ für alle Paare von Elementen der betrachteten Menge *definit* ist.

128. Für die Beziehung: „α ist Teil von β“, die wir in den vorangehenden Betrachtungen zugrunde gelegt haben, ist die Forderung 3 nicht erfüllt. Wir lassen nunmehr auch 2 fallen, setzen also lediglich voraus, daß für alle Elementenpaare einer Menge μ eine Aussage der Form $(x\ \mathfrak{r}\ y)$ definit sei und daß $(y\ \mathfrak{r}\ x)$ falsch sei, wenn $(x\ \mathfrak{r}\ y)$ richtig ist, daß somit von den Aussagen $(x\ \mathfrak{r}\ y)$, $(y\ \mathfrak{r}\ x)$ notwendig eine falsch sein muß. Insbesondere ist stets $(x\ \mathfrak{r}\ x)$ falsch.

129. Alle $y \varepsilon \mu$ für welche die Aussage (y non $\mathfrak{r}x$) wahr, also $(y\,\mathfrak{r}x)$ falsch ist, bilden eine Untermenge $\mathfrak{F}x \neq \mu$. Für (y non $\mathfrak{r}\,x$) können wir also jetzt $y \varepsilon \mathfrak{F}x$, und für $(y\mathfrak{r}x)$: $y \varepsilon \mathfrak{C}\mathfrak{F}x$ schreiben, wenn allgemein $\mathfrak{C}\alpha = \mu - \alpha$ gesetzt wird. $\mathfrak{C}$ ist eine antitone, nullreguläre Funktion mit einfachen Eigenschaften (§ 88 flgd.).

Aus $y \varepsilon \mathfrak{C}\mathfrak{F}x$ muß nach unserer Voraussetzung $x \varepsilon \mathfrak{F}y$ folgen. Dies läßt sich durch eine Funktionalrelation ausdrücken: Es ist $x \varepsilon \mathfrak{F}y$ für alle

$y \varepsilon \mathfrak{C}\mathfrak{F}x$, d. h. $\mathfrak{E}x \neq \mathfrak{F}y$ für jedes $\mathfrak{F}y \varepsilon \mathfrak{F}_1 \mathfrak{C}\mathfrak{F}x$, somit $\mathfrak{E}x \neq \mathfrak{D}\mathfrak{F}_1 \mathfrak{C}\mathfrak{F}x$, oder

$$\text{(XLVIIIa)} \qquad \mathfrak{E} \neq \mathfrak{D}\mathfrak{F}_1 \mathfrak{C}\mathfrak{F},$$

woraus rückwärts wieder die Voraussetzung folgt.

Da $\mathfrak{D}\mathfrak{F}_1\mathfrak{C}$ eine homöotone Funktion ist, folgt aus XLVIIIa:

$$\text{(XLVIIIb)} \qquad \mathfrak{S}\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{J} \neq \mathfrak{S}(\mathfrak{D}\mathfrak{F}_1\mathfrak{C})_1\mathfrak{F}_1 \neq (\mathfrak{D}\mathfrak{F}_1\mathfrak{C})\,\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1;$$

beachten wir, daß $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1\mathfrak{E} = \mathfrak{F}$ (XXb und XIV), so folgt hieraus, wenn $\mathfrak{E}x$ als Argument genommen wird, wieder XLVIIIa.

130. Wir betrachten jetzt die $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1$-Ketten, die von μ umfaßt werden. Da alle Werte von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{U}\mu$ enthalten sind, ist mindestens μ eine $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1$-Kette. Ist α irgend eine $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1$-Kette, so enthält α zu jedem seiner Elemente x auch die zugehörigen Elemente von $\mathfrak{F}x$; das sind alle y, für die $(y\,\mathfrak{r}\,x)$ nicht zutrifft.

Aus $x \varepsilon \alpha$, $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1\alpha \neq \alpha$ folgt also $\mathfrak{F}x \neq \alpha$.

Nach XLVIIIb wird für eine $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1$-Kette α zugleich:

$$\text{(IL)} \qquad \alpha \neq \mathfrak{D}\mathfrak{F}_1\mathfrak{C}\alpha,$$

das heißt: aus $x \varepsilon \mathfrak{C}\alpha$ folgt $\alpha \neq \mathfrak{F}x$.

Sind also α, β zwei $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1$-Ketten und enthält β ein Element x, welches nicht in α, somit in $\mathfrak{C}\alpha$ enthalten ist, so wird

$$\alpha \neq \mathfrak{F}x \neq \beta.$$

Enthält β ein solches Element nicht, so ist dagegen

$$\beta \neq \alpha.$$

Die $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1$-Ketten bilden also eine durch Subsumption geordnete und, da $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1$ distributiv ist, abgeschlossene Menge.

131. Wir nennen jetzt kurz eine $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1$-Kette einen „*Rest*“. Die Komplementärmenge eines Restes soll ein „*Abschnitt*“ genannt werden. Da aus $\alpha \neq \beta$ $\mathfrak{C}\beta \neq \mathfrak{C}\alpha$ folgt, bilden auch die Abschnitte eine durch Subsumption geordnete und, wie sich leicht zeigen läßt, ebenfalls abgeschlossene Menge.

Aus (IL) folgern wir

$$\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{F}_1\mathfrak{C}\alpha \neq \mathfrak{C}\alpha,$$

worin die linke Seite zu $\mathfrak{S}(\mathfrak{C}\mathfrak{F})_1\mathfrak{C}\alpha$ wird (XXXVI). Die Abschnitte sind also $\mathfrak{S}(\mathfrak{C}\mathfrak{F})_1$-Ketten, d. h. ein Abschnitt enthält zu jedem seiner Elemente x auch alle y, für die $(y\,\mathfrak{r}\,x)$ zutrifft*).

132. Ist jetzt ϱ ein Rest, $\alpha = \mathfrak{C}\varrho$ der zugehörige Abschnitt, $x \varepsilon \alpha$, $y \varepsilon \varrho$, so ist $\mathfrak{F}y \neq \varrho$, daher $x \varepsilon \mathfrak{C}\mathfrak{F}y$ oder: die Aussage $(x\,\mathfrak{r}\,y)$ ist wahr. Wird umgekehrt μ in zwei Mengen α, ϱ zerlegt, derart, daß $(x\,\mathfrak{r}\,y)$ wahr ist für jedes Paar Elemente x, y, von denen $x \varepsilon \alpha$, $y \varepsilon \varrho$ ist, so muß $\mathfrak{F}y \neq \varrho$, d. h. ϱ eine $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_1$-Kette, ein Rest sein. Wir nennen daher die Zerlegung $\{\alpha, \varrho\}$ einen Schnitt. Da 0 und μ ebenfalls Reste sind, haben wir konsequenterweise noch $\{0, \mu\}$ und $\{\mu, 0\}$ als unechte Schnitte mitzuzählen.

133. Da die Menge der Reste durch Subsumption geordnet ist, ergeben sich folgende einfache Beziehungen: Wenn $x \varepsilon \alpha, y \varepsilon \varrho$ und $\{\alpha, \varrho\}$ ein Schnitt ist, so werde dafür

$$x < y \quad (x \text{ „}vor\text{ “} y)$$

geschrieben. Wenn weder $x < y$ noch $y < x$ ist, so enthält jeder Rest und jeder Abschnitt mit x auch y. Dafür werde

$$x \parallel y \quad (x \text{ „}neben\text{“ } y)$$

geschrieben. Die Beziehungen $<$ und $\parallel$ sind transitiv, die erste unsymme-

---

*) Es braucht aber nicht umgekehrt jede $\mathfrak{S}(\mathfrak{C}\mathfrak{F})_1$-Kette ein Abschnitt zu sein.

trisch, die zweite symmetrisch. Das System der Reste, welches wir aus der Beziehung $x<y$ konstruieren können, stimmt mit dem aus $x\mathfrak{r}y$ konstruierten überein. Zwischen irgend zwei Elementen von μ besteht stets eine und nur eine der drei Relationen $x<y$, $y<x$, $x\|y$.

134. Man kann noch die Frage aufwerfen, wann die Aussagen $(x<y)$ und $(x\mathfrak{r}y)$ gleichbedeutend werden. Dass die zweite eine Folge der ersten ist, ergibt sich aus der Definition der ersteren: es gibt einen Schnitt $\{\alpha,\varrho\}$, so daß $x\varepsilon\alpha$, $y\varepsilon\varrho$. Daraus folgt nach § 132: $x\mathfrak{r}y$.

Wenn umgekehrt aus $x\mathfrak{r}y$ auch $x<y$ folgen soll, so muß die Relation $\mathfrak{r}$ jedenfalls wie $<$ transitiv sein. Diese Bedingung ist noch nicht hinreichend. Wählt man z. B. die Aussage „ξ ist Teil von η“ und für μ die Menge zweiter Stufe $\mathfrak{U}\alpha$, so sind die einzigen Reste: $\mathfrak{U}\alpha$, $\mathfrak{U}\alpha-\{0\}$, $\{\alpha\}$ und 0, die Beziehung $\xi<\eta$ hat also nur statt, wenn $\xi=0$. oder $\eta=\alpha$ ist, während „ξ Teil von η“ auch für andere Untermengen von α gilt, sowie α mehr als zwei Elemente enthält.

In der Tat muß noch die Aussage (x non $\mathfrak{r}y$, y non $\mathfrak{r}x$) mit $x\overset{\cdot}{\|}y$ gleichbedeutend, die in ihr enthaltene Relation also ebenfalls transitiv werden: Sind die vier Aussagen $(x\mathfrak{r}y)$, $(y\mathfrak{r}x)$, $(y\mathfrak{r}z)$, $(z\mathfrak{r}y)$ falsch, so sind auch beide Aussagen $(x\mathfrak{r}z)$, $(z\mathfrak{r}x)$ unzutreffend. Wenn diese Anforderungen von $\mathfrak{r}$ erfüllt werden, so wird in der Tat $x\mathfrak{r}y$ mit $x<y$ gleichbedeutend. Der Nachweis ist nahezu trivial.

135. Vergleichen wir mit diesen Erörterungen noch kurz die von *Dedekind* gegebene Konstruktion des Kontinuums. („*Stetigkeit und irrationale Zahlen*“.) Der Schnitt in der Menge der Rationalzahlen wird genau wie hier (§ 132) definiert; an Stelle der Aussage $x\mathfrak{r}y$ steht: „*x ist kleiner als y*“. (x, y sind Rationalzahlen, μ die Menge aller Rationalzahlen). Die *Lückenlosigkeit* in der Ordnung der Schnitte ergibt sich — da die Ordnung der Schnitte mit der subsumptiven der Reste übereinstimmt, — aus der *Abgeschlossenheit* der Menge der Reste, und diese nach dem *Durchschnitts-* und *Vereinigungssatz* daraus, daß die Definition der Reste eine *Kettendefinition* ist. Die subsumptive Ordnung der Reste wieder folgt allein aus der *Unsymmetrie* der Beziehung „x ist kleiner als y“. Die Transitivität und die Vollständigkeit der Disjunktion „kleiner, größer, gleich“ dienen lediglich dem Nachweis, daß die durch die Reste definierte Beziehung $x<y$ mit der ursprünglichen „x kleiner als y“ übereinstimmt, daß sich also die Irrationalzahlen in die Menge der rationalen Zahlen einordnen.

XIII. *Induktionsschlüsse.*

136. Es sei $\mathfrak{Z}$ eine homöotone Funktion, die Ketten besitzt, $\mathfrak{Z}_0\alpha$ die kleinste α umfassende $\mathfrak{Z}$-Kette und $\mathfrak{a}\xi$ eine Aussage, die für alle Argumente ξ von $\mathfrak{Z}$ definit ist.

Es mögen ferner folgende drei Voraussetzungen zutreffen:

A 1. $\mathfrak{a}\alpha$ *ist wahr für ein bestimmtes Argument* α *von* $\mathfrak{Z}_0$.

A 2. *Ist* $\mathfrak{a}\xi$ *wahr, so ist auch* $\mathfrak{a}\mathfrak{Z}\xi$ *wahr.*

A 3. *Ist* $\mathfrak{a}\xi$ *wahr für alle* $\xi \varepsilon A$, *so ist auch* $\mathfrak{a}\mathfrak{S}A$ *wahr.*

Dann ist auch $\mathfrak{a}\mathfrak{Z}_0\alpha$ *wahr.* Ist nämlich A die Menge aller solchen Untermengen von $\mathfrak{Z}_0\alpha$, für die die Aussage wahr ist, so ist $\mathfrak{S}A$ selbst eine solche Untermenge, und zwar die größte. Aus der Homöotonie von $\mathfrak{Z}$ folgt aber mit $\mathfrak{S}A \neq \mathfrak{Z}_0\alpha$: $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}A \neq \mathfrak{Z}\mathfrak{Z}_0\alpha \neq \mathfrak{Z}_0\alpha$, und da mit $\mathfrak{a}\mathfrak{S}A$ auch $\mathfrak{a}\mathfrak{Z}\mathfrak{S}A$ wahr ist, wird $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}A \varepsilon A$, $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}A \neq \mathfrak{S}A$, also $\mathfrak{S}A$ eine $\mathfrak{Z}$-Kette. Andererseits ist $\mathfrak{a}\alpha$ wahr, also auch $\alpha \varepsilon A$, $\alpha \neq \mathfrak{S}A$, womit sich $\mathfrak{Z}_0\alpha \neq \mathfrak{S}A$ ergibt. Es wird daher $\mathfrak{S}A = \mathfrak{Z}_0\alpha$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{Z}_0\alpha$ wahr, wie behauptet.

137. Der Schluß aus den drei Voraussetzungen auf die Wahrheit der Aussage $\mathfrak{a}\mathfrak{Z}\alpha_0$, wird „*Induktionsschluß*“ genannt. Er nimmt noch verschiedene spezielle Formen an. Zunächst kann die Aussage $\mathfrak{a}\xi$ die Form haben: „*Die Aussage* $\mathfrak{b}x$ *ist wahr für alle Elemente* x *von* ξ“, worin wiederum $\mathfrak{b}x$ eine definite Aussage sein muß. Für diese Form der Aussage ist die dritte Voraussetung von selbst erfüllt; der Induktionsschluß nimmt also folgende Form an:

B 1. *Die Aussage* $\mathfrak{b}x$ *sei wahr für alle Elemente von* α.

B 2. *Ist* $\mathfrak{b}x$ *wahr für alle Elemente von* ξ, *so auch für alle Elemente von* $\mathfrak{Z}\xi$.

Dann ist $\mathfrak{b}x$ *wahr für alle Elemente von* $\mathfrak{Z}_0\alpha$.

138. Eine besonders häufig auftretende Modifikation ist die, daß

$$\alpha = \mathfrak{E}a, \quad \mathfrak{Z}_0\alpha = \mathfrak{Z}_e a$$

wird: Die erste Voraussetzung lautet dann kürzer: „$\mathfrak{b}a$ *sei wahr*“.

Wenn ferner $\mathfrak{Z}$ eine distributive Funktion ist, so wird $\mathfrak{Z}\xi = \mathfrak{S}(\mathfrak{Z}\mathfrak{E})_1\xi$, also $\mathfrak{a}\mathfrak{Z}\xi$ wahr, wenn $\mathfrak{a}\mathfrak{Z}\mathfrak{E}x$ für jedes $x \varepsilon \xi$ wahr ist. In diesem Falle

lautet die zweite Voraussetzung: „*Ist* $\mathfrak{b}x$ *wahr, so ist auch* $\mathfrak{b}y$ *wahr für alle Elemente von* $\mathfrak{Z}\mathfrak{E}x$.“

139. Ist im besonderen $\mathfrak{Z}$ eine Bildfunktion $\mathfrak{F}_1$, so ist $\mathfrak{Z}\mathfrak{E}x=\mathfrak{E}\mathfrak{F}x$, d. h. es enthält $\mathfrak{Z}\mathfrak{E}x$ nur ein Element $y=\mathfrak{F}x$. Die betrachteten Spezialisierungen ergeben dann folgendes Schlußschema:

C1. *Sei* $\mathfrak{b}a$ *wahr für ein bestimmtes* a.

C2. *Ist* $\mathfrak{b}x$ *wahr, so sei auch* $\mathfrak{b}\mathfrak{F}x$ *wahr.*

Dann ist $\mathfrak{b}x$ *wahr für alle Elemente der kleinsten,* a *enthaltenden* $\mathfrak{F}_1$*-Kette.*

Diese Form des Induktionsschlusses ist die übliche des Schlusses von n auf $n+1$ und zuerst von *Dedekind* mittelst der Kettentheorie begründet worden.

140. Betrachten wir an der Hand von C nochmals die erste Form A, so sehen wir, daß die Aussage $\mathfrak{a}$ auf Grund der beiden ersten Voraussetzungen für alle Elemente der kleinsten $\mathfrak{Z}_1$-Kette $\mathfrak{Z}_{10}\alpha$ wahr sein muß, die α enthält. Die dort benutzte Menge A ist ferner so beschaffen, daß sie die Vereinigung jeder ihrer Untermengen B enthält. Denn $\mathfrak{a}\xi$ ist wahr für alle $\xi\,\varepsilon\,B$, also auf Grund der dritten Voraussetzung auch für $\xi=\mathfrak{S}B$. A ist also eine $(\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{S}_1\mathfrak{M}\mathfrak{U})$-Kette, und es wird daher $\mathfrak{a}\xi$ wahr für alle Elemente der kleinsten Kette dieser Art, die α enthält; damit, wie wir bereits sahen, auch für das größte Element $\mathfrak{Z}_0\alpha$ dieser Kette.

141. Wir beweisen jetzt unter der besonderen Annahme

(a) $$\mathfrak{Z}\neq\mathfrak{Z}$$

die bereits in § 117 skizzierte Wohlordnung der kleinsten abgeschlossenen, α enthaltenden $\mathfrak{Z}_1$-Kette. Wir untersuchen dabei zunächst nur die kleinste $(\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{S}_1\mathfrak{M}\mathfrak{U})$-Kette und zeigen nachträglich, daß sie auch abgeschlossen, d. h. eine $\mathfrak{D}_1\mathfrak{M}\mathfrak{U}$-Kette ist.

Von der Homöotonie von $\mathfrak{Z}$ *machen wir keinen Gebrauch;* aus diesem Grunde müssen einzelne, bereits früher bewiesene Resultate nochmals abgeleitet werden. (Statt dieses Verfahrens kann man auch die Voraussetzung der Homöotonie nachträglich dadurch beseitigen, daß man die Wohlordnung der $(\mathfrak{F}_1+\mathfrak{S}_1\mathfrak{M}\mathfrak{U})$-Kette für nicht homöotones $\mathfrak{F}$ aus der der $(\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{S}_1\mathfrak{M}\mathfrak{U})$-Kette für das homöotone $\mathfrak{Z}=\mathfrak{F}_1+\mathfrak{S}_1\mathfrak{M}\mathfrak{U}$ herleitet. Die Elemente dieser zweiten Kette $\mathfrak{Z}_e^*\mathfrak{E}\alpha$ sind die Abschnitte der Kette $\mathfrak{F}_e^*\alpha$.)

142. Die Existenz der kleinsten $(\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{S}_1\mathfrak{M}\mathfrak{U})$-Kette, die ξ enthält, muß als selbständige Voraussetzung gelten, da sie für nicht-homöotones $\mathfrak{Z}$ nicht auf die Existenz von $\mathfrak{Z}_0\xi$ zurückgeführt werden kann.

Wir bezeichnen sie im folgenden kurz mit $\mathfrak{P}\xi$, für das zu untersuchende Argument α auch mit M. Sie enthält in $\mathfrak{S}M = \mu$ ein größtes Element und es muß $\mathfrak{Z}\mu \varepsilon M$, d. h. $\mathfrak{Z}\mu \notin \mu$, wegen (a) also $\mathfrak{Z}\mu = \mu$ sein. Daß diese Identität auch nur für das Element μ von M eintreten kann, wird sich herausstellen. Für nicht zu M gehörige Elemente von $\mathfrak{U}(\alpha, \mu)$ läßt sich dies nach dem Verzicht auf die Homöotonie von $\mathfrak{Z}$ nicht mehr behaupten.

Die zur Aussage $\xi \varepsilon M$ gehörige Aussonderungsfunktion bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}$: $\mathfrak{M}X = \mathfrak{D}\{M, X\}$. Ist X eine $\mathfrak{S}_1\mathfrak{M}\mathfrak{U}$-Kette, so auch $\mathfrak{M}X$, ist X $\mathfrak{Z}_1$-Kette, so ebenfalls $\mathfrak{M}X$.

Mit $\mathfrak{V}\xi$ bezeichnen wir die antitone Funktion $\mathfrak{U}(\xi, \mu)$. Da $\mathfrak{V}\xi$ abgeschlossen ist, ist $\mathfrak{M}\mathfrak{V}\xi$ eine $\mathfrak{S}_1\mathfrak{M}\mathfrak{U}$-Kette. Es wird $\mathfrak{D}\mathfrak{M}\mathfrak{V}\xi = \xi$ für jedes $\xi \varepsilon M$, ebenso $\mathfrak{S}\mathfrak{M}\mathfrak{U}\xi = \xi$.

143. Ist $\xi \varepsilon \mathfrak{M}\mathfrak{V}\alpha$, so ist $\alpha \notin \xi$, daher auch $\alpha \notin \mathfrak{Z}\xi$, und da mit ξ auch $\mathfrak{Z}\xi \varepsilon M$: $\mathfrak{Z}\xi \varepsilon \mathfrak{M}\mathfrak{V}\alpha \,.\, \mathfrak{M}\mathfrak{V}\alpha$ ist also eine $\mathfrak{Z}_1$-Kette, zugleich mit $\mathfrak{V}\alpha$ $\mathfrak{S}_1\mathfrak{M}\mathfrak{U}$-Kette, endlich enthält es α, umfaßt daher M und muß als Untermenge von M mit $M = \mathfrak{P}\alpha$ identisch sein. *Alle Elemente von* $\mathfrak{P}\alpha$ *umfassen daher* α.

$$\mathfrak{D}\mathfrak{P}\alpha = \alpha.$$

Dieser Beweis enthält einen *ersten Induktionsschluß*: Ist $\alpha \notin \xi$, so auch $\alpha \notin \mathfrak{Z}\xi$. Ist $\alpha \notin \xi$ für alle $\xi \varepsilon A$, so auch $\alpha \notin \mathfrak{S}A$. Demnach gilt $\alpha \notin \xi$ für jedes $\xi \varepsilon \mathfrak{P}\alpha$.

144. Wir betrachten nunmehr die Aussage $\mathfrak{a}\xi$ folgenden Inhalts:

Es ist $\xi \varepsilon \mathfrak{P}\alpha$ *und für jedes* $\eta \varepsilon \mathfrak{M}\mathfrak{U}\xi$ *entweder* $\mathfrak{Z}\eta \notin \xi$ *oder* $\eta = \xi$.

Mittels eines *zweiten Induktionsschlusses* erkennen wir, daß $\mathfrak{a}\xi$ noch erheblich mehr aussagt.

Die Menge $\mathfrak{M}\mathfrak{U}\xi + \mathfrak{M}\mathfrak{V}\mathfrak{Z}\xi = X$, d. h. die Menge aller Untermengen von ξ und aller Übermengen von $\mathfrak{Z}\xi$, die zu M gehören, ist eine $\mathfrak{S}_1\mathfrak{M}\mathfrak{U}$-Kette. Denn es gilt dies von $M, \mathfrak{U}\xi$ und $\mathfrak{V}\mathfrak{Z}\zeta$, also auch von $\mathfrak{M}\mathfrak{U}\xi$, $\mathfrak{M}\mathfrak{V}\mathfrak{Z}\xi$ und endlich von X, weil $\mathfrak{S}\mathfrak{M}\mathfrak{U}\xi = \xi \notin \mathfrak{Z}\xi = \mathfrak{D}\mathfrak{M}\mathfrak{V}\mathfrak{Z}\xi$ (XLVI).

Ferner ist X eine $\mathfrak{Z}_1$-Kette. Denn ist $\eta \varepsilon X$, so ist entweder $\eta \varepsilon \mathfrak{M}\mathfrak{U}\xi$, und dann wieder auf Grund der Aussage $\mathfrak{a}\xi$ entweder $\mathfrak{Z}\eta \varepsilon \mathfrak{M}\mathfrak{U}\xi$ oder $\eta = \xi$, $\mathfrak{Z}\eta = \mathfrak{Z}\xi \varepsilon \mathfrak{M}\mathfrak{B}\mathfrak{Z}\xi$. Oder es ist η und damit $\mathfrak{Z}\eta \varepsilon \mathfrak{M}\mathfrak{B}\mathfrak{Z}\xi$.

Endlich ist $\alpha \varepsilon X$, weil $\alpha \neq \xi$, d. h. $\alpha \varepsilon \mathfrak{M}\mathfrak{U}\xi$. Demnach ist $M \neq X$, d. h. $X = M$. Hieraus folgt, daß *auf Grund der Aussage* $\mathfrak{a}\xi$ ξ *ein Schnittelement von* M *sein muß.*

145. Es folgt nunmehr der *dritte Induktionsschluß.*

Die Aussage $\mathfrak{a}\alpha$ *ist wahr.* Denn aus $\eta \varepsilon M$ folgt $\alpha \neq \eta$, aus $\eta \neq \alpha$ daher $\eta = \alpha$.

Ist $\mathfrak{a}\xi$ *wahr, so auch* $\mathfrak{a}\mathfrak{Z}\xi$. Denn ist $\eta \varepsilon M$, so ist entweder $\eta \varepsilon \mathfrak{M}\mathfrak{U}\xi$ und dann $\mathfrak{Z}\eta \neq \mathfrak{Z}\xi$, nämlich entweder $\mathfrak{Z}\eta \neq \xi \neq \mathfrak{Z}\xi$ oder $\eta = \xi$, $\mathfrak{Z}\eta = \mathfrak{Z}\xi$. Oder es ist $\eta \varepsilon \mathfrak{M}\mathfrak{B}\mathfrak{Z}\xi$, also $\mathfrak{Z}\xi \neq \eta$, was mit $\eta \neq \mathfrak{Z}\xi$ $\eta = \mathfrak{Z}\xi$ ergibt.

Ist $\mathfrak{a}\xi$ *wahr für alle* $\xi \varepsilon A$, *so ist* $\mathfrak{a}\mathfrak{S}A$ wahr. Es sind nämlich alle $\xi \varepsilon A$ Schnittelemente und danach nur zwei Fälle möglich: Entweder ist η Teil *eines* $\xi \varepsilon A$, also $\mathfrak{Z}\eta \neq \xi \neq \mathfrak{S}A$. Oder η umfaßt *alle* ξ, damit auch $\mathfrak{S}A$, es ist also mit $\eta \neq \mathfrak{S}A$ zusammen $\eta = \mathfrak{S}A$.

Die Aussage $\mathfrak{a}\xi$ *ist demnach wahr für alle Elemente von* $\mathfrak{P}\alpha$, *insbesondere ist* $\mathfrak{P}\alpha$ *durch Subsumption geordnet.*

146. Durch einen vierten und letzten *Induktionsschluß* erkennen wir, daß $\mathfrak{Z}\xi = \xi, \xi \varepsilon M$ nur für $\xi = \mathfrak{S}M = \mu$ gelten kann. Es wird nämlich $\mathfrak{M}\mathfrak{U}\xi$ eine $\mathfrak{Z}_1$-Kette, denn aus $\eta \varepsilon \mathfrak{M}\mathfrak{U}\xi$ folgt entweder $\mathfrak{Z}\eta \neq \xi$, oder $\eta = \xi$, $\mathfrak{Z}\eta = \mathfrak{Z}\xi = \xi$, also sicher $\mathfrak{Z}\eta \varepsilon \mathfrak{M}\mathfrak{U}\xi$. Da ferner mit $\mathfrak{U}\xi$ auch $\mathfrak{M}\mathfrak{U}\xi$ eine $\mathfrak{S}_1\mathfrak{M}\mathfrak{U}$-Kette ist und α enthält, wird $\mathfrak{M}\mathfrak{U}\xi = M$, $\xi = \mathfrak{S}\mathfrak{M}\mathfrak{U}\xi = \mathfrak{S}M = \mu$.

147. Es sei wieder A eine Untermenge von M, so bezeichnen wir mit B die Menge aller solchen $\eta \varepsilon M$, die von jedem $\xi \varepsilon A$ umfaßt werden. B ist nicht leer, da sicher $\alpha \varepsilon B$ gilt. Da auch $\mathfrak{S}B = \beta \varepsilon M$, wird $\beta \varepsilon B$. *Wir behaupten, daß* $\beta \varepsilon A$ *sein muß*, d. h. daß A ein kleinstes Element enthält.

Wäre dies nämlich nicht der Fall, so wäre β Teil jedes $\xi \varepsilon A$, daher $\mathfrak{Z}\beta \neq \xi$ für alle $\xi \varepsilon A$, d. h. $\mathfrak{Z}\beta \varepsilon B$, $\mathfrak{Z}\beta \neq \mathfrak{S}B = \beta$, und mit (a) $\beta = \mathfrak{Z}\beta$, endlich nach zuletzt bewiesenem: $\beta = \mu$. Es kann aber μ nicht Teil irgend eines Elementes von M sein; womit unsere Annahme auf einen Widerspruch geleitet ist.

148. Hiermit haben wir ein Resultat gewonnen, welches das ganze Beweisthema in die einzige Formel

$$\text{(L)} \qquad \mathfrak{D}A \varepsilon A, \text{ wenn } A \neq \mathfrak{P}\alpha,$$

zusammenfaßt. Besteht A aus *zwei* Elementen α, β, so ist entweder $\mathfrak{D}A = \alpha$ oder $\mathfrak{D}A = \beta$, also entweder $\alpha \in \beta$ oder $\beta \in \alpha$, d. h. $\mathfrak{P}\alpha$ ist durch Subsumption geordnet. Ist A eine *beliebige* Untermenge von $\mathfrak{P}\alpha$, so enthält sie ein *kleinstes*, im Sinne der Ordnung von α über $\mathfrak{Z}\alpha \ldots$ bis μ ein *erstes* Element. Die Ordnung ist also eine *Wohlordnung*. Schließlich bemerken wir dabei noch, daß $\mathfrak{P}\alpha$ auch $\mathfrak{D}_1\mathfrak{M}$-Kette, somit *abgeschlossen* ist.

XIV. *Der Wohlordnungssatz.*

49. Betrachten wir die Elemente von $\mathfrak{P}\alpha$ als „*Abschnitte*“ von μ, so ergibt sich folgende „unvollständige“ Ordnung der Elemente von μ. Es ist $x < y$, wenn ein Element $\xi \varepsilon \mathfrak{P}\alpha$ x enthält, ohne y zu enthalten. Es ist $x \parallel y$, wenn jedes x enthaltende $\xi \varepsilon \mathfrak{P}\alpha$ auch y enthält und umgekehrt.

Ist X die Menge aller x nicht enthaltenden $\xi \varepsilon \mathfrak{P}\alpha$, so ist $\mathfrak{S}X$ das größte unter ihnen. Da $\mathfrak{S}X$ nicht gleich μ sein kann, so ist $\mathfrak{S}X$ Teil von $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}X$, also $x \varepsilon \mathfrak{Z}\mathfrak{S}X$, und jedes $\eta \varepsilon \mathfrak{P}\alpha$, welches x enthält, muß $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}X$ umfassen. Es enthält daher $\mathfrak{Z}\mathfrak{S}X - \mathfrak{S}X$ genau alle $y \parallel x$, und wenn die Ordnung von μ eine *vollständige* sein soll, d. h. wenn $x \parallel y$ nur für $x = y$ gelten soll, so darf $\mathfrak{Z}\xi$ höchstens ein Element mehr wie ξ enthalten, wenn $\xi \varepsilon M$ ist. Diese Bedingung ist ersichtlich auch hinreichend. Sie wird insbesondere dann zutreffen, wenn sie für alle Argumente ξ von $\mathfrak{Z}$ überhaupt erfüllt ist. Andernfalls wird sich ihr Erfülltsein in einem Sonderfall nur durch einen weiteren Induktionsschluß erweisen lassen.

150. Eine solche Funktion $\mathfrak{Z}$, deren Wert höchstens ein Element mehr enthält als das Argument, liegt dem Beweise des *Wohlordnungssatzes von Zermelo* zugrunde. Gegeben ist eine Belegung von $\mathfrak{M}\mathfrak{U}\mu$ mit Elementen von μ, so zwar, daß $\mathfrak{F}\alpha \varepsilon \alpha$ für jedes $\alpha \in \mu$ gilt, (α nicht leer). Eine solche Belegung existiert auf Grund des Auswahlaxioms immer. Die Funktion $\mathfrak{Z}\alpha = \alpha + |\mathfrak{F}(\mu - \alpha)|$, $\mathfrak{Z}\mu = \mu$ genügt dann der Bedingung, daß stets $\alpha \in \mathfrak{Z}\alpha$ und in $\mathfrak{Z}\alpha$ höchstens ein Element mehr als in α enthalten ist. Die kleinste abgeschlossene $\mathfrak{Z}_1$-Kette, die die Null enthält, liefert dann eine Wohlordnung ihrer Vereinigung. Diese Vereinigung genügt der Bedingung $\mathfrak{Z}\sigma = \sigma$, und da dies nur für $\sigma = \mu$ zutrifft, muß die ganze Menge μ wohlgeordnet werden. Da übrigens $\mathfrak{M}\mathfrak{U}\mu$ abgeschlossen ist und alle Werte von $\mathfrak{Z}$ umfaßt, ist die Existenz der genannten Kette gesichert.

151. Diese Konstruktion liegt — im wesentlichen — dem ersten Beweis zugrunde, den Herr *Zermelo* gegeben hat. Der zweite operiert mit der Funktion $\mathfrak{Y}\alpha = \alpha - \{\mathfrak{F}\alpha\}$, die wir für $\mathfrak{S}\alpha = \mu - \alpha$ durch $\mathfrak{S}\mathfrak{Z}\mathfrak{S}$ erklären können. Sie genügt der Bedingung $\mathfrak{Y}\alpha \neq \alpha$; die kleinste abgeschlossene $\mathfrak{Y}_1$-Kette $\mathfrak{Y}_e^*\mu$, die μ enthält, wird, wenn man ihr noch die Null hinzufügt, gleich $\mathfrak{S}_1\mathfrak{Z}_e^*0$. Sie enthält also die Reste der Wohlordnung, während $\mathfrak{Z}_e^*0$ die Abschnitte enthält.

152. Hierzu läßt sich noch folgendes Allgemeine bemerken. Wenn $\mathfrak{Y} \neq \mathfrak{J}$ ist, so ist $\mathfrak{U}\mu$ für jedes Argument μ von $\mathfrak{Y}$ eine abgeschlossene $\mathfrak{Y}_1$-Kette, es existiert also $\mathfrak{Y}_e^*\mu$.

Andererseits wird

$$\mathfrak{Y}\mathfrak{S} \neq \mathfrak{S},$$

daher

$$\mathfrak{S}\mathfrak{S} = \mathfrak{J} \neq \mathfrak{S}\mathfrak{Y}\mathfrak{S}.$$

Die Funktion $\mathfrak{S}\mathfrak{Y}\mathfrak{S}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{Z}$.

Weiterhin ist (nach XXXV, XXIXb):

$$\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_1\mathfrak{U} = \mathfrak{D}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{U} = \mathfrak{D}_1\mathfrak{U}\mathfrak{S}_1$$

also

$$\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_1\mathfrak{U}\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{D}_1\mathfrak{U}$$

und damit auch

$$\mathfrak{S}_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{U}\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_1\mathfrak{U},$$

endlich*)

$$\mathfrak{Z}^* = \mathfrak{S}_1\mathfrak{Y}_1\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_1\mathfrak{U}\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{U}\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_1(\mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{S}_1\mathfrak{U} + \mathfrak{D}_1\mathfrak{U})\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_1\mathfrak{Y}^*\mathfrak{S}_1.$$

Daraus folgt fast unmittelbar $\mathfrak{Z}_0^* = \mathfrak{S}_1^*\mathfrak{Y}_0^*\mathfrak{S}_1^{**})$, insbesondere nach XXb:

$$\mathfrak{Z}_e^*0 = \mathfrak{Z}_0^*\mathfrak{E}0 = \mathfrak{S}_1\mathfrak{Y}_0^*\mathfrak{S}_1\mathfrak{E}0 = \mathfrak{S}_1\mathfrak{Y}_0^*\mathfrak{E}\mathfrak{S}0 = \mathfrak{S}_1\mathfrak{Y}_a^*\mu.$$

Ist jetzt

$$B \neq \mathfrak{Y}_e^*\mu,$$

so wird

$$A = \mathfrak{S}_1 B \neq \mathfrak{S}_1\mathfrak{Y}_e^*\mu = \mathfrak{Z}_e^*0,$$

---

*) Auf die Nullausschließung kann hier verzichtet werden, vgl. S. 112 Fußnote.

**) Allgemein gilt für zwei homöotone Funktionen $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$, von denen $\mathfrak{F}$ der Bedingung $\mathfrak{F}\mathfrak{F} = \mathfrak{J}$ genügt und $\mathfrak{G}$-Ketten besitzt: $(\mathfrak{F}\mathfrak{G}\mathfrak{F})_0 = \mathfrak{F}\mathfrak{G}_0\mathfrak{F}$.

daher (nach L):

$$\mathfrak{D} A \varepsilon A$$

oder (nach XXXV)

$$\mathfrak{D}\mathfrak{G}_1 B = \mathfrak{G}\mathfrak{S} B \varepsilon \mathfrak{G}_1 B, \text{ d. h.}$$

$$\mathfrak{S} B \varepsilon B.$$

Es ist also $\mathfrak{Y}_e^* \mu$ durch Subsumption geordnet, derart, daß jede Untermenge ein *größtes* Element besitzt. Diese Ordnung ist daher im Sinne der fallenden Elemente:

$$\mu, \mathfrak{Y}\mu, \mathfrak{Y}^2\mu, \ldots \mathfrak{Y}^\omega\mu, \ldots, 0$$

eine Wohlordnung.

153. An Stelle dieser Zurückführung könnten wir auch die Entwicklungen der §§ 141 ff unter der Voraussetzung $\mathfrak{Y} \neq \mathfrak{J}$ an Stelle von $\mathfrak{J} \neq \mathfrak{Z}$ wieder aufnehmen. Sie lassen sich in wörtlicher Analogie durchführen, wenn man nur $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{U}$ die Rollen tauschen läßt. Wir wollen dies unter der speziellen Annahme tun, daß $\mathfrak{Y}\alpha$ genau ein Element weniger enthält als α, sofern α nicht leer ist ($\mathfrak{Y}0 = 0$), um die Vereinfachungen zu verfolgen, die sich daraus ergeben.

Wir erhalten damit den Induktionsschluß des zweiten Beweises von *Zermelo*, können aber jetzt an Hand unserer allgemeineren Betrachtungen den Ursprung der einzelnen Schritte weiter übersehen.

154. Es habe $\mathfrak{F}$ den in § 150 angegebenen Sinn, d. h. $\mathfrak{F}\alpha$ sei das „ausgezeichnete“ Element von $\alpha \neq \mu$. $\mathfrak{Y}\alpha$ bedeute $\alpha - \{\mathfrak{F}\alpha\}$, wenn α nicht leer ist. $\mathfrak{Y}0$ sei gleich 0. Da $\mathfrak{U}\alpha$ eine abgeschlossene $\mathfrak{Y}_1$-Kette ist, existiert $M = \mathfrak{Y}_e^* \mu$, und zwar ist $\mu = \mathfrak{S}M$ größtes Element von M. Der *„erste Induktionsschluß“* entfällt somit.

Wenn $\mathfrak{Y}\eta \neq \xi \neq \eta$ ist, muß notwendig $\xi = \mathfrak{Y}\eta$ oder $\xi = \eta$ sein, da sich sonst η und $\mathfrak{Y}\eta$ um mehr als ein Element unterscheiden müßten.

An Stelle der Aussage a des § 144 setzen wir daraufhin die einfachere bξ: ξ *ist ein Schnittelement von* $M = \mathfrak{Y}_e^* \mu$. Der *„zweite Induktionsschluß“* kehrt sich dann folgendermaßen um [$\mathfrak{M}X = \mathfrak{D}\{M, X\}$, $\mathfrak{V}\alpha = \mathfrak{U}(\alpha, \mu)$]: Es sei ξ Schnittelement. $X = \mathfrak{M}\mathfrak{U}\mathfrak{Y}\xi + \mathfrak{M}\mathfrak{V}\xi$ ist abgeschlossen, weil es $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$, also auch $\mathfrak{M}\mathfrak{U}, \mathfrak{M}\mathfrak{V}$ für jedes Argument sind und weil $\mathfrak{S}\mathfrak{M}\mathfrak{U}\mathfrak{Y}\xi = \mathfrak{Y}\xi \neq \xi = \mathfrak{D}\mathfrak{M}\mathfrak{V}\xi$ gilt. Ist ferner $\eta \varepsilon X$, so ist $\eta \neq \mathfrak{Y}\xi$ oder $\xi \neq \eta$, je nachdem $\eta \varepsilon \mathfrak{M}\mathfrak{U}\mathfrak{Y}\xi$ oder $\eta \varepsilon \mathfrak{M}\mathfrak{V}\xi$ ist. Im ersten Falle ist $\mathfrak{Y}\eta \varepsilon \mathfrak{M}\mathfrak{U}\mathfrak{Y}\xi$, im zweiten

entweder $\xi = \eta$, $\mathfrak{Y}\eta = \mathfrak{Y}\xi \,\varepsilon\, \mathfrak{MU}\mathfrak{Y}\xi$, oder $\xi \neq \mathfrak{Y}\eta$ d. h. $\mathfrak{Y}\eta \,\varepsilon\, \mathfrak{MB}\xi$, da aus $\mathfrak{Y}\eta \neq \xi \neq \eta$ andernfalls $\xi = \eta$ folgen müßte. Also ist X eine $\mathfrak{Y}_1$-Kette, und da es abgeschlossen, Untermenge von M ist und μ enthält, wird $X = M$.

155. Der *„dritte Induktionsschluß"* vollzieht sich folgendermaßen:

I. μ ist Schnittelement, denn es umfaßt alle $\xi \,\varepsilon\, M$.

II. Ist ξ ein Schnittelement, so auch $\mathfrak{Y}\xi$. Denn für $\eta \,\varepsilon\, M$ ist entweder $\eta \,\varepsilon\, \mathfrak{MU}\mathfrak{Y}\xi$, d. h. $\eta \neq \mathfrak{Y}\xi$, oder $\eta \,\varepsilon\, \mathfrak{MB}\xi$, d. h. $\mathfrak{Y}\xi \neq \xi \neq \eta$.

III. Da M abgeschlossen, ist auch die Menge aller Schnittelemente von M abgeschlossen (XLVII).

Folglich ist die Menge aller Schnittelemente mit M identisch, d. h. jedes Element von M ist Schnittelement.

Mit dem ersten wird auch der vierte Induktionsschluß überflüssig.

Der Beweis für $\mathfrak{S}A \,\varepsilon\, A$, bei dem nur $A = 0$ auszuschließen ist, bietet nichts Neues.

---

156. Es hat sich in unseren Entwicklungen gezeigt, daß der Zusammenhang zwischen dem Wohlordnungssatz und der Kettentheorie ein systematischer ist: nicht nur macht die Theorie der Wohlordnung in ihren Induktionsschlüssen von der Kettentheorie Gebrauch, sondern es läuft auch umgekehrt die Kettentheorie in ihrem weiteren Ausbau ungezwungen in die Theorie der Wohlordnung ein, wobei sich gerade die von *Dedekind* und *Zermelo* untersuchten beiden Kettentypen, nämlich die kleinsten Ketten einer Bildfunktion und die kleinsten abgeschlossenen Ketten einer Bildfunktion als wichtigste Repräsentanten herausheben. Ebenso wie sich die *Cantor*schen transfiniten Zahlen an die endlichen Zahlen anschließen, wie sich der Schluß auf den Limes an den Schluß auf $n+1$ angliedert, ebenso führt die Verallgemeinerung der *Dedekind*schen Kettentheorie auf diejenigen Ketten, die zum ersten Male von *Zermelo* beim Beweise des Wohlordnungssatzes angewandt worden sind.

Bonn, im August 1908.

On the congruence $x^n + y^n + z^n \equiv 0 \pmod{p}$.

By Mr. *L. E. Dickson* at Chicago.

1. Let n and p be odd prime numbers. If $p-1$ is not divisible by n, every integer is the residue of an nth power modulo p, so that the congruence has solutions each prime to p. Again, if $p-1$ is a multiple of $3n$, there exist integral solutions t of $(t^{3n}-1):(t^n-1) \equiv 0 \pmod{p}$, so that our congruence has the solutions $x \equiv 1$, $y \equiv t$, $z \equiv t^2$. *Henceforth we assume that* $p = mn+1$, *where* m *is not divisible by* 3, n *and* p *being odd primes.*

A very elementary argument*) suffices to show that for a fixed value of m, not divisible by 3, there exist only a finite number of odd primes n for which our congruence has solutions prime to p.

We consider in the present paper the following problem: Given an odd prime n, to determine the moduli p for which the congruence has solutions prime to p. In his paper in this journal, vol. 9 (1832), *Libri* treated the case $n=3$ and promised (on p. 275) to prove on another occasion that, for any n, when p exceeds a finite limit the congruence has solutions prime to p. But *Libri* apparently**) did not recur te the problem.

2. It suffices to discuss the congruence

$$1 + \varrho^n \equiv \sigma^n \pmod{p = mn+1}. \tag{1.}$$

Let m and n be integers for which (1.) has no set of integral solutions ϱ, σ, each prime to p. Then, for any integer ϱ such that neither

*) *Wendt*, this journal, vol. 113 (1894), p. 337.

**) *Wendt*, l. c., p. 338.

ϱ nor $1+\varrho^n$ is divisible by p, $1+\varrho^n$ is not the residue of an nth power modulo p and hence*) is a root of

$$\frac{\vartheta^{mn}-1}{\vartheta^m-1} = \sum_{s=0}^{n-1} \vartheta^{ms} \equiv 0 \pmod p.$$

Hence our hypothesis requires that

$$\varrho(1+\varrho^n)\sum_{s=0}^{n-1}(1+\varrho^n)^{ms} \equiv 0 \pmod p \tag{2.}$$

for every integer ϱ. We have

$$\varrho\,(1+\varrho^n)^{ms+1} = \sum_{j=0}^{ms+1}\binom{ms+1}{j}\varrho^{nj+1} = A + \sum_{t=0}^{s-1}\sum_{r=mt}^{m(t+1)-1}\binom{ms+1}{r}\varrho^{nr+1},$$

where A is the sum of the terms given by $j=ms$ and $j=ms+1$:

$$A = (ms+1)\,\varrho^{nms+1} + \varrho^{n(ms+1)+1}.$$

Instead of the summation-indices t and r, we employ t and k, where $r=mt+k$. Further, we reduce the exponents by means of

$$\varrho^{mn+1} \equiv \varrho \pmod p.$$

Hence we obtain

$$\varrho\,(1+\varrho^n)^{ms+1} \equiv (ms+1)\,\varrho + \varrho^{n+1} + \sum_{t=0}^{s-1}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{ms+1}{mt+k}\varrho^{nk+1}. \tag{3.}$$

Summing for $s=0,\ldots n-1$, and applying (2.), we get

$$\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{t=0}^{s-1}\binom{ms+1}{mt+k} \equiv \begin{cases} -\frac{1}{2}(n+1) & \text{if } k=0, \\ -n & \text{if } k=1, \\ 0 & \text{if } 1<k\leqq m-1. \end{cases} \tag{4.}$$

*) A number is an nth power if, and only if, it is a root of $z^m \equiv 1 \pmod p$.

We denote the kth relation (4.) by R_k. Evidently,

$$(R_k) \qquad \sum_{t=1}^{n-2} \sum_{s=t+1}^{n-1} \binom{ms+1}{mt+k} \equiv B_k \pmod{p},$$

$$(5.) \qquad B_0 \equiv B_1 \equiv -\frac{1}{2}(3n-1), \quad B_k = -\sum_{s=1}^{n-1} \binom{ms+1}{k} \quad (k \geqq 2).$$

If, in the terms of (4.) with $t>0, k=1$, we replace the summation-index t by $\sigma = s-t$, we obtain the terms (4.) with $t>0$, $k=0$. Hence R_0 and R_1 are equivalent. For $2 \leqq k \leqq m-1$, R_k is equivalent to R_{m+1-k}, as shown by replacing the index t by $\sigma = s-t-1$ in the latter. Hence we may take $k \leqq \frac{1}{2}m$.

3. To evaluate $B_k (k \geqq 2)$, we multiply the numerator and denominator of $\binom{ms+1}{k}$ by n^k and apply $mn \equiv -1 \pmod{p}$. Thus

$$n^k k!\, B_k \equiv -\sum_{s=1}^{n-1} (n-s)(-s)(-n-s)\cdots[(2-k)n - s] \pmod{p}.$$

Changing s into $n-\sigma$, we get

$$(6.) \qquad n^k k!\, B_k \equiv -\sum_{\sigma=1}^{n-1} \sigma[\sigma-n][\sigma-2n]\cdots[\sigma-n(k-1)] \pmod{p}.$$

We obtain the following values, modulo $p = mn+1$:

$$(7.) \quad \begin{cases} B_2 \equiv \dfrac{n^2-1}{12n}, \quad B_3 \equiv \dfrac{-(n^2-1)}{24n}, \quad B_4 \equiv \dfrac{(n^2-1)(19n^2-1)}{6!\,n^3}, \quad B_5 \equiv \dfrac{-(n^2-1)(9n^2-1)}{480n^3}, \\ B_6 \equiv \dfrac{(n^2-1)(863n^4-145n^2+2)}{12\cdot 7!\,n^5}, \quad B_7 \equiv \dfrac{-(n^2-1)(1375n^4-305n^2+10)}{24\cdot 7!\,n^5}, \\ B_8 \equiv \dfrac{(n^2-1)(33953n^6-9247n^4+497n^2-3)}{10!\,n^7}, \end{cases}$$

the numerators involving only even powers of n. For k odd, B_k is a linear function of the $B_l (l<k)$, with coefficients independent of n. For example,

$$(8.) \qquad 2B_3 = -B_2, \quad 4B_5 = B_2 - 6B_4, \quad 2B_7 = -5B_6 + 5B_4 - B_2.$$

In the sequel we shall employ only the B_k with k even. We get

$$B_2 \equiv \frac{2}{5}, \quad B_4 \equiv \frac{79}{5^4}, \quad B_6 \equiv \frac{1063}{5^6}, \quad B_8 \equiv \frac{86764}{5^9} \quad (\text{for } n=5),$$

$$B_2 \equiv \frac{4}{7}, \quad B_4 \equiv \frac{62}{7^3}, \quad B_6 \equiv \frac{11472}{7^6}, \quad B_8 \equiv \frac{367811}{7^8} \quad (\text{for } n=7),$$

$$B_2 \equiv \frac{10}{11}, \quad B_4 \equiv \frac{383}{11^3}, \quad B_6 \equiv \frac{25035}{11^5}, \quad B_8 \equiv \frac{1984606}{11^7} \quad (\text{for } n=11),$$

the denominators being powers of n. Various algebraic and arithmetic properties of the function B_k will be given on another occasion.

4. The character of the further treatment of the problem may be seen in the very simple case $n=3$, for which the devices later employed are unnecessary. For $n=3$, we have

$$(R_0) \qquad \binom{2m+1}{m} + 4 \equiv 0 \pmod{p=3m+1},$$

$$(R_2) \qquad \binom{2m+1}{m+2} + \binom{m+1}{2} + \binom{2m+1}{2} \equiv 0 \pmod p,$$

the latter occurring when $m \geqq 3$. Now

$$\binom{2m+1}{m+2} = \binom{2m+1}{m} \cdot \frac{m}{m+2} \equiv \frac{-1}{5}\binom{2m+1}{m} \pmod p.$$

Hence R_2 may be given the form

$$\frac{1}{5}\binom{2m+1}{m} \equiv \frac{1}{2}m(5m+3) \equiv \frac{-2}{9} \pmod p.$$

Combining this with (R_0), we get $13 \equiv 0$, whence $p=13$. For $m<3$, we have $m=2$, $p=7$. *For* $n=3$, *the values* $p=7$ *and* $p=13$ *alone are exceptional.*

5. In general, it would appear that, for k odd, R_k is a linear combination of the R_l $(l<k)$. For example, in accord with (5.) and (8.),

$$(9.)\qquad R_1\equiv R_0,\ 2R_3\equiv -R_2,\ 4R_5\equiv R_2-6R_4,$$
$$2R_7\equiv -5R_6+5R_4-R_2 \pmod{mn+1.}$$

The plan of the treatment consists in employing f independent relations R_0, R_2, R_4,... to determine f fundamental unknowns

$$(10.)\qquad \binom{2m}{m},\ \binom{3m}{m},\ \binom{4m}{m},\ \binom{4m}{2m},\ \cdots$$

the remaining binomial coefficients in R_k being congruent modulo p to one of the set (10.) or to a multiple of one of them. Then an additional relation R will give rise to a number which p must divide. We may also employ the identities

$$(11.)\qquad \binom{rm}{am}\binom{(b+c)m}{bm}=\binom{rm}{bm}\binom{(a+c)m}{cm}=\binom{rm}{cm}\binom{(a+b)m}{am},$$

where $r=a+b+c$, to obtain numbers which p must divide.

6. In each binomial coefficient in R_k, we subtract each factor of the numerator from the modulus $p=mn+1$ and get

$$(12.)\qquad \binom{ms+1}{mt+k}\equiv(-1)^k\binom{m(n-s+t)-1+k}{m(n-s)-1} \pmod p.$$

If we first replace $mt+k$ by $m(s-t)+1-k$, we obtain

$$(13.)\qquad \binom{ms+1}{mt+k}\equiv-(-1)^k\binom{m(n-t)-k}{m(n-s)-1}.$$

As we desire a minimum number of unknowns (10.), we retain a term of R_k which has $n-s+t\geqq s$, $n-t\geqq s$; replace a term with $n-s+t<s$, $s\geqq 2t$, by (12.); and replace a term with $n-t<s$, $s<2t$, by (13.). The respective cases are

$$t\leqq\frac{1}{3}n,\quad s\leqq\frac{1}{2}(n+t);\quad t>\frac{1}{3}n,\quad s\leqq n-t;$$
$$t>\frac{1}{3}n,\quad s\geqq 2t;\qquad t\leqq\frac{1}{3}n,\quad s>\frac{1}{2}(n+t);$$
$$t>\frac{1}{3}n,\quad 2t>s>n-t.$$

Let $\varepsilon(x)$ be the greatest integer $\leq x$. Then R_k becomes

$$(14.)\quad \sum_{t=1}^{\varepsilon\left(\frac{n}{3}\right)} \sum_{s=t+1}^{\varepsilon\left(\frac{n+t}{2}\right)} \binom{ms+1}{mt+k} + \sum_{t=1+\varepsilon\left(\frac{n}{3}\right)}^{\frac{1}{2}(n-1)} \sum_{s=t+1}^{n-t} \binom{ms+1}{mt+k}$$

$$+ (-1)^k \sum_{t=1+\varepsilon\left(\frac{n}{3}\right)}^{\frac{1}{2}(n-1)} \sum_{s=2t}^{n-1} \binom{m(n-s+t)-1+k}{m(n-s)-1}$$

$$+ (-1)^k \sum_{t=1}^{\varepsilon\left(\frac{n}{3}\right)} \sum_{s=1+\varepsilon\left(\frac{n+t}{2}\right)}^{n-1} \binom{m(n-s+t)-1+k}{m(n-s)-1}$$

$$- (-1)^k \sum_{t=1+\varepsilon\left(\frac{n+1}{3}\right)}^{\frac{1}{2}(n-1)} \sum_{s=n-t+1}^{2t-1} \binom{m(n-t)-k}{m(n-s)-1}$$

$$- (-1)^k \sum_{t=\frac{1}{2}(n+1)}^{n-2} \sum_{s=t+1}^{n-1} \binom{m(n-t)-k}{m(n-s)-1} \equiv B_k \pmod p.$$

7. Let $n=5$. Then (14.) becomes

$$\binom{2m+1}{m+k} + \binom{3m+1}{m+k} + \binom{3m+1}{2m+k} - (-1)^k \binom{2m-k}{m-1}$$

$$+ (-1)^k \binom{3m-1+k}{m-1} + (-1)^k \binom{2m-1+k}{m-1} \equiv B_k,$$

as may be obtained directly from (R_k) by employing (12.) or (13.) when $s=4$. Each of the six binomial coefficients is the product of $\binom{2m}{m}$ or $\binom{3m}{m}$ by a fraction which is congruent, modulo $5m+1$, to an absolute constant. For $k=0,2,4$, the resulting relations are

$$\frac{3}{2}\binom{2m}{m} + \frac{3}{2}\binom{3m}{m} + 7 \equiv 0,$$

$$-\frac{5}{21}\binom{2m}{m} - \frac{5}{18}\binom{3m}{m} - \frac{2}{5} \equiv 0,$$

$$-\frac{74}{3\cdot 17\cdot 19}\binom{2m}{m} - \frac{787}{36\cdot 13\cdot 19}\binom{3m}{m} - \frac{79}{5^4} \equiv 0.$$

The determinant equals

$$\frac{-41\cdot 71\cdot 101}{2^2\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13\cdot 17\cdot 19}.$$

The use of the third equation implies that $m-1\geqq k\geqq 4$. For $m<5$, $5m+1$ is prime only for $m=2$.

For $n=5$, *the values* $p=11,\ 41,\ 71,\ 101$ *alone**) *are exceptional.*

8. Let $n=7$. Then (14.) becomes

$$\sum_{s=2}^{4}\binom{ms+1}{m+k}+\binom{3m+1}{2m+k}+\binom{4m+1}{2m+k}+\binom{4m+1}{3m+k}+(-1)^k\binom{4m-1+k}{m-1}$$
$$+(-1)^k\sum_{\substack{t=1,2\\ s=5,6}}\binom{m(7-s+t)-1+k}{m(7-s)-1}-(-1)^k\left\{\binom{4m-k}{2m-1}\right.$$
$$\left.+\binom{3m-k}{2m-1}+\binom{3m-k}{m-1}+\binom{2m-k}{m-1}\right\}\equiv B_k.$$

For $k=0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$, the preceding relation becomes

$$\frac{3}{2}\binom{2m}{m}+3\binom{3m}{m}+\frac{3}{2}\binom{4m}{m}+\frac{3}{2}\binom{4m}{2m}\equiv -10,$$

$$-\frac{43}{18\cdot 13}\binom{2m}{m}-\frac{92}{15\cdot 13}\binom{3m}{m}-\frac{36}{11\cdot 13}\binom{4m}{m}-\frac{16}{55}\binom{4m}{2m}\equiv\frac{4}{7},$$

$$-\frac{1919}{4\cdot 27\cdot 13\cdot 23}\binom{2m}{m}-\frac{11\cdot 7782}{5\cdot 27\cdot 13\cdot 17\cdot 19}\binom{3m}{m}-\frac{1033}{90\cdot 11\cdot 13}\binom{4m}{m}$$
$$-\frac{12587}{50\cdot 11\cdot 13\cdot 19}\binom{4m}{2m}\equiv\frac{62}{73},$$

$$-\frac{11\cdot 2543069}{4\cdot 27\cdot 13\cdot 17\cdot 23\cdot 37\cdot 41}\binom{2m}{m}-\frac{20063884}{9\cdot 5\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 31\cdot 41}\binom{3m}{m}$$
$$-\frac{30983}{24\cdot 5\cdot 11\cdot 13\cdot 41}\binom{4m}{m}-\frac{689}{5\cdot 11\cdot 13\cdot 19}\binom{4m}{2m}\equiv\frac{11472}{7^6},$$

$$-\frac{19044709}{4\cdot 27\cdot 13\cdot 17\cdot 23\cdot 37\cdot 41}\binom{2m}{m}-\frac{630404849}{9\cdot 5\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 31\cdot 41\cdot 47}\binom{3m}{m}$$
$$-\frac{16712287}{16\cdot 5\cdot 11\cdot 13\cdot 23\cdot 41\cdot 53}\binom{4m}{m}-\frac{6818683}{30\cdot 11\cdot 13\cdot 19\cdot 47\cdot 53}\binom{4m}{2m}\equiv\frac{367811}{7^8}.$$

---

*) *Legendre* found no other values <1000; *Théorie des nombres*, second supplément, p. 17.

From the first four relations we get

$$r\binom{2m}{m} \equiv -24\cdot 5\cdot 11\cdot 17\cdot 23\cdot 37\cdot 29433399671\cdot 7^{-8},$$

$$r\binom{3m}{m} \equiv \quad 10\cdot 17\cdot 31\cdot 30297\,61017809\cdot 7^{-6},$$

$$r\binom{4m}{m} \equiv -16\cdot 5\cdot 11\cdot 9606112\,95322797\cdot 7^{-8},$$

$$r\binom{4m}{2m} \equiv -\frac{1}{3}\cdot 10\cdot 11\cdot 52546627\,88522620\cdot 7^{-8},$$

where $r = 919329679$. Substituting these in r times the fifth relation, we see that

$$\frac{20\cdot 71\cdot 113\cdot 491\cdot b}{9\cdot 13\cdot 19\cdot 23\cdot 41\cdot 47\cdot 53\cdot 7^8} \qquad (b = 560330223403)$$

must be divisible by p. We avoid the problem of factoring b as follows. In a special case of (11.),

$$\binom{4m}{2m}\binom{2m}{m} = \binom{4m}{m}\binom{3m}{m},$$

we multiply by r^2 and substitute the above values. We get

$$16\cdot 50\cdot 11\cdot 17\cdot 71\cdot 113\cdot 491\cdot 7^{-16}c,$$

where

$$c = 13060288398622299219291 29.$$

Now b and c are relatively prime. Hence if $m-1 \geqq k \geqq 8$, p must be 71, 113, or 491. For $m < 9$, $7m+1$ is prime only for $m = 4$. *For* $n = 7$, *the values* $p = 29$, 71, 113, 491 *alone are exceptional.*

Eine formale Ableitung der *Laurent*schen Reihe einer Funktion aus einer ihrer rationalgebrochenen Näherungsfunktionen.

Von Herrn *O. Biermann* in Brünn.

Es ist bekannt, wie man aus der trigonometrischen Interpolationsfunktion

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\mu=1}^{\mu=n} a_\mu \cos \mu x + b_\mu \sin \mu x$$

einer eindeutigen Funktion einer reellen Variablen x von der Periode 2π die Darstellung dieser Funktion durch die *Fourier*sche Reihe formal herstellt*).

Entsprechend soll hier die *Laurent*sche Reihe für eine in einem Kreisringe um die Stelle Null, der von zwei konzentrischen Kreisen um diesen Punkt begrenzt sei, reguläre eindeutige analytische und meromorphe Funktion $f(x)$ der komplexen Variablen x mit der singulären Stelle Null formal aus einer ihrer rational-gebrochenen Interpolationsfunktionen $g(x)$ mit derselben singulären Stelle abgeleitet und auf eine Erweiterung der *Bessel*schen Untersuchungen über die beste Wahl der Koeffizienten der Interpolationsfunktion hingewiesen werden.

Es sei die Näherungsfunktion mit der singulären Stelle Null in der Form gewählt

$$g(x)=\sum_{\mu=-n}^{\mu=+n} a_\mu x^\mu$$

und ihre $2n+1$ Konstanten a_μ seien durch die Aussagen bestimmt, daß $g(x)$ an $2n+1$ vorgegebenen Stellen

*) Siehe z. B.: *O. Biermann*, „Vorlesungen über mathematische Näherungsmethoden“, Seite 153.

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{2n}$$

des Kreisringes dieselben Werte annehme, wie $f(x)$, also durch die $2n+1$ Gleichungen

$$g(\alpha_\nu)=f(\alpha_\nu). \qquad (\nu=0, 1, \dots 2n)$$

Bevor hier die Stellen α_ν besonders gewählt werden, sei aber noch bemerkt, daß die Funktion $f(x)$ in dem Bereiche, wo die Näherungsfunktion statt ihrer gesetzt werden soll, und

$$f(x)=g(x)+R(x)$$

ist, das sogenannte Restglied $R(x)$ bei einer komplexen Variablen x mit Hilfe des *Cauchy*schen Integralsatzes, aber bei einer bloß reellen Variablen x mit Hilfe des *Rolle*schen Satzes zu beurteilen ist.

Nun setzen wir fest, daß die Stellen α_ν alle auf einem Kreise r um die Stelle Null und dort äquidistant gewählt werden, daß also gilt

$$\alpha_\nu=r\left[\cos\left(\alpha+\nu\frac{2\pi}{2n+1}\right)+i\sin\left(\alpha+\nu\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right]. \qquad (\nu=0, 1, \dots 2n)$$

Wenn α auch noch so gewählt wird, daß $\cos\alpha+i\sin\alpha=\varepsilon_0$ eine $(2n+1)$-te Einheitswurzel ist, und somit der Faktor von r in dem Ausdrucke von α_ν ebenfalls eine etwa mit ε_ν zu bezeichnende $(2n+1)$-te Einheitswurzel ist, so gilt auch

$$\alpha_\nu^{-\mu}=(\nu\,\varepsilon_\nu)^{-\mu}=r^{-\mu}\varepsilon_\nu^{2n-\mu+1}. \qquad \begin{pmatrix}\mu=1, 2, \dots n\\ \nu=0, 1, \dots 2n\end{pmatrix}$$

Man hat danach die Koeffizienten α_μ aus den Gleichungen zu bestimmen:

$$\begin{aligned} a_0+\ & a_1 r\varepsilon_\nu \ +\cdots+\ a_n r^n \varepsilon_\nu^n \ + \\ &+a_{-1}r^{-1}\varepsilon_\nu^{2n}+\cdots+a_{-n}r^{-n}\varepsilon_\nu^{n+1}=f(\alpha_\nu), \end{aligned} \qquad (\nu=0, 1, \dots 2n)$$

die, wenn man die Bezeichnung einführt

$$\alpha+\nu\frac{2\pi}{2n+1}=\beta_\nu,$$

auch in der Form zu schreiben sind:

$$\begin{aligned}a_0+\quad a_1r(\cos\beta_\nu+i\sin\beta_\nu)+\cdots+\quad a_nr^n(\cos n\beta_\nu+i\sin n\beta_\nu)+\\ +a_{-1}r^{-1}(\cos\beta_\nu-i\sin\beta_\nu)+\cdots+a_{-n}r^{-n}(\cos n\beta_\nu-i\sin n\beta_\nu)=f(\alpha_\nu).\end{aligned}$$

$(\nu=0,1,\ldots 2n)$

Bei dieser Schreibweise ersieht man leicht, daß auf Grund bekannter Relationen die Summierung dieser noch der Reihe nach mit $\alpha_0^{-\mu}, \alpha_1^{-\mu}, \ldots\alpha_{2n}^{-\mu}$ zu multiplizierenden Gleichungen die Beziehung liefert:

$$(2n+1)a_\mu=\sum_{\nu=0}^{\nu=2n}f(\alpha_\nu)\alpha_\nu^{-\mu}.$$

Aus dem Umstande, daß diese Lösungen der früheren Gleichungen bestimmt sind, folgt, daß die Determinante des linearen Gleichungssystemes in den Größen a_μ nicht verschwindet.

Läßt man nun aber n immer größer werden, so daß auf den Kreis r um den Punkt Null immer mehr Stellen α_ν fallen, deren gegenseitige auf dem Kreise zu messende Entfernung

$$\frac{2\pi}{2n+1}r$$

ist, so entsteht bei dem Grenzübergange, weil bei konstantem r durch Differentiation von $x=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ und geeignete Division hervorgeht, daß

$$d\varphi=\frac{1}{i}\frac{dx}{x},$$

die Formel:

$$a_\mu=\frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\frac{f(x)}{x^{\mu-1}}dx,$$

wo sich die Integration zunächst im Sinne entgegen der Uhrzeigerbewegung

auf irgend einen Kreis r unseres Ringes um den Punkt Null bezieht, aber aus bekannten Gründen auch auf irgend eine die innere Begrenzung des Ringes umschließende Kurve C in dem Ringe beziehen kann.

So hat man bei dem Grenzübergange aus der Näherungsfunktion $g(x)$ formal die *Laurent*sche Reihe

$$G(x)=\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} a_\mu x^\mu$$

abgeleitet; und man sieht auch, wenn diese Reihe in dem Kreisringe konvergiert und wenn das früher genannte der Näherungsfunktion $g(x)$ additiv beizufügende Restglied $R(x)$, damit man $f(x)$ erhalte, im Grenzfalle daselbst verschwindet, daß die *Laurent*sche Reihe in dem Kreisringe die Funktion $f(x)$ darstellt und umgekehrt $f(x)$ in dem Kreisringe durch die *Laurent*sche Reihe darstellbar wird.

Zum Schlusse möchte ich noch darauf hinweisen, daß über die näherungsweise Darstellung einer durch eine *Laurent*sche Reihe dargestellten Funktion mit Hilfe einer rationalen Funktion ein analoger Satz besteht wie über die beste Annäherung einer Funktion einer reellen Veränderlichen durch eine endliche *Fourier*sche Reihe.

Quelques formules concernant la théorie de la fonction $[x]$ et des nombres de *Bernoulli*.

(Extrait d'une lettre adressée à M. *K. Hensel* par MM. *A. Friedmann* et *J. Tamarkine* à St.-Pétersbourg).

Supposons que p soit un nombre premier et a un nombre entier non divisible par p. Désignons par

$$\left[\frac{a}{p}\right]$$

le nombre entier le plus grand contenu dans $\frac{a}{p}$. Soit encore

$$q(a)=\frac{a^{p-1}-1}{p}$$

le nombre qui se nomme „le quotient de *Fermat*“ (voir le mémoire de M. *Lerch* dans les Math. Ann. t. 60, p. 471).

Nous écrirons:

$$(1.) \qquad \alpha_1 = N \text{ où } N=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1)+1}{p}$$

(quotient de *Wilson* — ibid., p. 472);

$$(2.) \qquad \alpha_{p-1}=-\frac{1}{2}$$

et

$$(3.) \qquad \alpha_k = (-1)^{\frac{p-k}{2}} \frac{B_{\frac{p-k}{2}}}{p-k}, \qquad (k = 2, 3, \ldots p-2)$$

où $B_{\frac{p-k}{2}}$ désigne le $\left(\frac{p-k}{2}\right)^{\text{ième}}$ nombre de *Bernoulli* si $(p-k)$ est un nombre pair, et $B_{\frac{p-k}{2}}$ est égal à *zéro* si $(p-k)$ est un nombre impair.

A l'aide de ces notations nous pouvons démontrer sans peine le théorème suivant:

Théorème. *On peut dire quand* $a \not\equiv 0 \pmod{p}$:

$$(I.) \qquad \left[\frac{a}{p}\right] \equiv -a\,q(a) - 1 - \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k a^k \pmod{p}.$$

Nous savons que $\left[\frac{a}{p}\right]$ est la totalité des nombres divisibles par p dans la suite des nombres:

$$1, 2, 3, \ldots a;$$

l'expression

$$1 - y^{p-1}$$

est congrue à *zéro*, quand $y \not\equiv 0 \pmod{p}$ et à *l'unité*, quand $y \equiv 0 \pmod{p}$. Ainsi l'expression

$$\sum_{y=1}^{a} (1 - y^{p-1})$$

est congrue à $\left[\frac{a}{p}\right] \pmod{p}$.

Nous avons par supposition:

$$a \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ et } a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p};$$

donc nous pouvons écrire:

$$(4.) \qquad \left[\frac{a}{p}\right] \equiv \sum_{y=1}^{a-1} (1 - y^{p-1}) \equiv a - 1 - \sum_{y=1}^{a-1} y^{p-1} \pmod{p},$$

parce que:

$$1-a^{p-1}\equiv 0 \pmod{p}.$$

En nous servant des notations de M. *Markoff* (voir „La Théorie des différences", St.-Pétersbourg 1899, t. II pp. 18—24), nous pouvons écrire:

$$(5.)\qquad \sum_{y=1}^{a-1} y^{p-1}=\frac{a^p}{p}+A_1 a^{p-1}+A_2(p-1)a^{p-2}+\cdots$$
$$+A_k(p-1)\cdots(p-k+1)a^{p-k}+\cdots+A_{p-1}(p-1)\cdots 2a$$

où

$$A_m=\frac{(-1)^{\frac{m}{2}-1}}{m!}B_{\frac{m}{2}}.$$

D'ailleurs on sait:

$$(p-1)!\ A_{p-1}p\equiv-\left(\frac{-1}{p}\right)B_{\frac{p-1}{2}}p\equiv-1 \pmod{p}.$$

Donc la somme du premier terme et du dernier terme dans la seconde partie de la formule (5.) devient:

$$\frac{a^p}{p}+A_{p-1}(p-1)!\,a=a\,\frac{a^{p-1}-1}{p}+La,$$

où L est le quotient:

$$\frac{(p-1)!\ A_{p-1}p+1}{p}.$$

Ainsi, en désignant

$$q(a)=\frac{a^{p-1}-1}{p}$$

on peut écrire:

$$\sum_{h=1}^{a-1} y^{p-1}=aq(a)+La+A_1a^{p-1}+A_2(p-1)a^{p-2}+\cdots$$
$$+A_k(p-1)\cdots(p-k+1)a^{p-k}+\cdots+A_{p-2}(p-1)\ldots 3a^2.$$

En adoptant la formule (1.) et nos notations on trouve immédiatement:

$$(6.) \qquad \left[\frac{a}{p}\right] \equiv -aq(a) - 1 - \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k a^k \pmod{p},$$

où $\alpha_1 = -1 + L$; tout de suite nous démontrerons que

$$\alpha_1 \equiv N \pmod{p},$$

Pour cela transformons la formule (6.) comme il suit:

$$\frac{1}{a}\left[\frac{a}{p}\right] \equiv -q(a) - \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k a^{k-1} - \frac{1}{a} \pmod{p}.$$

Prenons la somme:

$$\sum_{a=1}^{p-1} \frac{1}{a}\left[\frac{a}{p}\right] \equiv -\sum_{a=1}^{p-1} q(a) - \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k \sum_{a=1}^{p-1} a^{k-1} - \sum_{a=1}^{p-1} \frac{1}{a} \pmod{p};$$

tous les nombres $\left[\frac{a}{p}\right]$ pour $a = 1, 2, \ldots p-1$ sont égaux à zéro; la somme

$$\sum_{a=1}^{p-1} q(a) \equiv N \pmod{p},$$

où N est le quotient de *Wilson* (voir le mém. de M. *Lerch* déjà cité p. 472).

On a d'ailleurs:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k \sum_{a=1}^{p-1} a^{k-1} \equiv -\alpha_1 \pmod{p};$$

donc enfin:

$$\alpha_1 \equiv N \pmod{p}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il faut remarquer que tous les α_k, où k est pair $< p-1$, sont égaux à zéro. Ainsi on a:

$$(7.) \qquad \alpha_{2n} \equiv 0 \pmod{p}. \qquad (0 < 2n < p-1)$$

Cette propriété des nombres α_k est du reste évidente.

On peut déduire du théorème démontré plusieurs formules concernant la théorie des nombres de *Bernoulli.*

Par exemple, on trouve sans peine les expressions suivantes:

$$(8.)\qquad \sum_{a=1}^{p-1} a^m q(a) \equiv \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{m}{2}} B_{\frac{m}{2}}}{m} & \text{pour } m \text{ pair,} \quad (0<m<p-1) \\ & \pmod p \\ \dfrac{(-1)^{\frac{m}{2}} B_{\frac{m}{2}}}{m} \equiv 0 & \text{pour } m \text{ impair.} \quad (1<m<p-1) \end{cases}$$

On démontrera les formules (8.) en multipliant les deux parties de la congruence (I.) par a^{m-1}, en prenant la somme entre $a=1$ et $a=p-1$ et en remarquant que les sommes:

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{m-1}\left[\frac{a}{p}\right]; \qquad \sum_{a=1}^{p-1} a^{m+k-1}$$

vérifient les relations suivantes:

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{m-1}\left[\frac{a}{p}\right] = 0,$$

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{m+k-1} \equiv 0 \pmod p, \text{ quand } m+k-1 \not\equiv 0 \pmod{p-1},$$

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{m+k-1} \equiv -1 \pmod p, \text{ quand } m+k-1 \equiv 0 \pmod{p-1}.$$

En posant $m=0$, on en déduit la formule de M. *Lerch* (ibid., p. 477).

Les formules (8.) sont une généralisation de la formule de M. *Lerch* dont nous avons déjà parlé.

En appliquant les méthodes analogues on trouve:

$$(9.)\qquad \sum_{a=1}^{p-1} a^m \left[\frac{a^n}{p}\right] \equiv -\sum_{a=1}^{p-1} a^{m+n} q(a^n) - \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k \sum_{a=1}^{p-1} a^{kn+m} \pmod p$$

où $n<p-1$.

Les formules (8.) nous donnent:

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{m+n} q(a^n) \equiv n \sum_{a=1}^{p-1} a^{m+n} q(a) \equiv \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}} B_{\frac{m+n}{2}}}{m+n} \pmod{p}$$

parce que $q(a^n) \equiv n\, q(a) \pmod{p}$ (voir M. *Lerch*, p. 472).

La somme:

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^{kn+m} \qquad (k \leqq p-1) \tag{10.}$$

est congrue à zéro (mod p), quand

$$kn + m \not\equiv 0 \pmod{p-1}$$

et elle est congrue à -1 (mod p), quand

$$kn + m \equiv 0 \pmod{p-1}.$$

Désignons par δ le plus grand commun diviseur des nombres n et $p-1$. Deux cas peuvent se présenter:

1°. $m \not\equiv 0 \pmod{\delta}$. Alors la congruence

$$kn + m \equiv 0 \pmod{p-1}$$

est impossible, toutes les sommes (10.) sont congrues à zéro (mod p) et nous aurons:

$$\sum_{a=1}^{p-1} a^m \left[\frac{a^n}{p}\right] \equiv -n \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}} B_{\frac{m+n}{2}}}{m+n} \pmod{p}. \tag{11.}$$

2°. $m \equiv 0 \pmod{\delta}$. Soit k_1 le moindre résidu positif du nombre $-\frac{m}{n} \left(\text{mod } \frac{p-1}{\delta}\right)$. Alors la totalité des valeurs du nombre k, pour les-

quelles la somme (10.) est congrue à $-1 \pmod p$ est représentée par la suite:

$$k_1, k_1 + \frac{p-1}{\delta}, \ \ldots \ k_1 + (\delta - 1)\frac{p-1}{\delta}$$

et on aura:

$$(12.) \quad \sum_{a=1}^{p-1} a^m \left[\frac{a^n}{p}\right] \equiv -n \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}} B_{\frac{m+n}{2}}}{m+n} + \alpha_{k_1} + \alpha_{k_1 + \frac{p-1}{\delta}} + \cdots + \alpha_{k_1 + (\delta-1)\frac{p-1}{\delta}} \pmod p.$$

Pour abréger l'écriture nous ne substituons pas au lieu de α_m son expression en nombres de *Bernoulli.*

Pour finir cette note nous ajoutons la remarque suivante:

On peut démontrer aisément que

$$(-1)^{\left[\frac{2a}{p}\right]} = 1 - 2\left[\frac{2a}{p}\right] + 4\left[\frac{a}{p}\right].$$

A l'aide de la formule (I.) nous obtenons:

$$(13.) \qquad (-1)^{\left[\frac{2a}{p}\right]} \equiv -1 + 4q(2)a + \sum_{k=2}^{p-1} 2\alpha_k (2^k - 2) a^k \pmod p.$$

Soit m un diviseur de $(p-1)$. Désignons par $\lambda_1(m)$ la somme

$$\sum_a a^t \qquad (0 \leqq t \leqq p-2)$$

prise par toutes les solutions incongrues de la congruence

$$(14.) \qquad x^m \equiv 1 \pmod p$$

dont les moindres résidus positifs sont $< \frac{p}{2}$, et par $\lambda_2(m)$ la somme analogue

$$\sum_b b^t \qquad (0 \leqq t \leqq p-2)$$

prise par toutes les solutions incongrues de la congruence (14.) dont les moindres résidus positifs sont $> \frac{p}{2}$.

Soit enfin: $$\lambda(m) = \lambda_1(m) - \lambda_2(m).$$

En multipliant les deux parties de la congruence (13.) par a^t et en faisant a prendre les valeurs des toutes les solutions incongrues de la congruence (14.), nous trouverons sans peine:

$$(15.)\quad \begin{cases} \lambda(m) \equiv 2m \sum_{r=r_1}^{r_2} a_{rm-t}(2^{rm-t}-2) \pmod p, \text{ si } \begin{cases} t \not\equiv 0 \\ t+1 \not\equiv 0 \end{cases} \pmod m, \\ \lambda(m) \equiv -m + 2m \sum_{r=r_1}^{r_2} a_{rm-t}(2^{rm-t}-2) \pmod p, \text{ si } t \equiv 0 \pmod m, \\ \lambda(m) \equiv 4mq(2) + 2m \sum_{s=1}^{\left[\frac{p-2}{m}\right]} a_{sm+1}(2^{sm+1}-2) \pmod p, \text{ si } t+1 \equiv 0 \pmod m. \end{cases}$$

Les nombres r_1 et r_2 sont déterminés par les conditions:

$$(r_1 - 1)m - t < 2 \leqq r_1 m - t$$
$$r_2 m - t \leqq p - t < (r_2 + 1)m - t.$$

En posant $t = 0$ nous remarquons que dans ce cas $\lambda(m)$ est égal à la différence entre le nombre des racines de la congruence (14.) dont les moindres résidus positifs sont $< \frac{p}{2}$ et celui des racines de la congruence (14.) dont les moindres résidus positifs sont $> \frac{p}{2}$. Or les formules (15.) nous donnent dans ce cas:

$$(16.)\quad \begin{cases} \lambda(m) \equiv 0 \pmod p, \text{ quand } m \text{ est pair}, \\ \lambda(m) \equiv 2m \sum_{r=1}^{\frac{p-1}{m}-1} a_{rm}(2^{rm}-2) \equiv -2(-1)^{\frac{p-m}{2}} \Big\{ B_{\frac{p-m}{2}}(2^m - 2) \\ \quad - B_{\frac{p-3m}{2}} \frac{2^{3m}-2}{3} + \cdots + (-1)^s B_{\frac{p-(2s+1)m}{2}} \frac{2^{(2s+1)m}-2}{2s+1} + \cdots \\ \quad + (-1)^{\frac{p-1-2m}{2m}} B_{\frac{m+1}{2}} \frac{m(2^{p-1-m}-2)}{p-1-m} \Big\} \pmod p, \text{ quand } m \text{ est impair}. \end{cases}$$

Les formules (16.) nous permettent de déduire des relations intéressantes entre les nombres de *Bernoulli*. Nous en citons quelques-unes

$1^0.\quad p=4n+3,\quad m=\frac{p-1}{2};$

$$\frac{p-1}{2}\Big)\equiv -2(-1)^{\frac{p+1}{4}}B_{\frac{p+1}{4}}\left\{\left(\frac{2}{p}\right)-2\right\}\pmod p:$$

$2^0.\quad p=8n+5,\quad m=\frac{p-1}{4};$

$$\lambda\left(\frac{p-1}{4}\right)\equiv -2(-1)^{\frac{p-5}{8}}B_{\frac{3p+1}{8}}\left(2^{\frac{p-1}{4}}-2\right)$$

$$+2(-1)^{\frac{p-5}{8}}B_{\frac{p+3}{8}}\frac{2^{3\frac{p-1}{4}}-2}{3}\pmod p;$$

$3^0.\quad p=12n+7,\ m+\frac{p-1}{6};$

$$\lambda\left(\frac{p-1}{6}\right)\equiv -2(-1)^{\frac{p+1}{4}}B_{\frac{3p-9}{12}}\left(2^{\frac{p-1}{6}}-2\right)$$

$$+2(-1)^{\frac{p+1}{4}}B_{\frac{p+1}{4}}\left\{\left(\frac{2}{p}\right)-2\right\}\frac{1}{3}-2(-1)^{\frac{p+1}{4}}B_{\frac{p+5}{12}}\cdot\frac{2^{5\frac{p-1}{6}}-2}{5}\pmod p;$$

d'où l'on tire:

$$4^0.\quad \lambda\left(\frac{p-1}{6}\right)+\frac{1}{3}\lambda\left(\frac{p-1}{2}\right)\equiv -2(-1)^{\frac{p+1}{4}}\left\{B_{\frac{3p-9}{12}}\left(2^{\frac{p-1}{6}}-2\right)\right.$$

$$\left.+B_{\frac{p+5}{12}}\cdot\frac{2^{5\frac{p-1}{6}}-2}{5}\right\}\pmod p.$$

Nous citons encore quelques relations qui résultent de la formule fondamentale (I.).

Désignons par

$$H(-p)$$

le nombre des classes des formes binaires quadratiques proprement primitives du déterminant negatif, $-p$, où p est un nombre premier de la forme $4n+3$.

Nous savons que

$$H(-p)=\left(2-\left(\frac{2}{p}\right)\right)\frac{\Sigma b-\Sigma a}{p},$$

où la somme Σb se rapporte à tous les résidus non quadratiques (mod p), et Σa se rapporte à tous les résidus quadratiques (mod p); $\left(\frac{2}{p}\right)$ étant le symbole quadratique de *Legendre*.

On peut écrire:

$$\Sigma b-\Sigma a=\sum_{x=1}^{x=p-1}x-2\Sigma a=\frac{p(p-1)}{2}-2\Sigma a,$$

$$(17.)\quad 2\Sigma a=\sum_{x=1}^{x=p-1}\left(x^2-p\left[\frac{x^2}{p}\right]\right)=\frac{p(p-1)(2p-1)}{6}-p\sum_{x=1}^{x=p-1}\left[\frac{x^2}{p}\right],$$

$$\frac{\Sigma b-\Sigma a}{p}=\frac{p-1}{2}-\frac{(p-1)(2p-1)}{6}+\sum_{x=1}^{x=p-1}\left[\frac{x^2}{p}\right].$$

Notre formule pour (I.), s'écrit de la manière suivante:

$$(18.)\qquad \left[\frac{x}{p}\right]\equiv -x\,q(x)-1-\sum_{k=1}^{k=p-1}\alpha_k x^k \pmod p.$$

Prenons dans la formule (18.) x^2 au lieu de x. En faisant la sommation de $x=1$ jusqu'à $x=p-1$, nous obtenons:

$$(19.)\quad \sum_{x=1}^{x=p-1}\left[\frac{x^2}{p}\right]\equiv -\sum_{x=1}^{x=p-1}x^2q(x^2)-(p-1)-\sum_{k=1}^{k=p-1}\alpha_k\sum_{x=1}^{x=p-1}x^{2k} \pmod p.$$

Par une simple discussion, nous aurons:

$$q(x^2)\equiv 2\,q(x) \pmod p.$$

M. *Lerch* a démontré (ibid; p. 483) la formule suivante:

$$\sum_{x=1}^{x=p-1}x^2\,q(x)\equiv -\frac{1}{12} \pmod p.$$

Ainsi on peut écrire:

$$\sum_{x=1}^{x=p-1} x^2 q(x^2) \equiv -\frac{1}{6} \pmod{p}.$$

Nous savons que

$$\sum_{x=1}^{x=p-1} x^{2k} \equiv 0 \pmod{p}$$

pour tous les $k=1,2,\ldots p-1$, à l'exception de $k=p-1$ et $k=\frac{p-1}{2}$, quand elle est congrue à $p-1 \pmod{p}$. En appliquant ces résultats à la formule (19.) nous pouvons dire que

$$\sum_{x=1}^{x=p-1} \left[\frac{x^2}{p}\right] \equiv \frac{1}{6} + 1 - \frac{1}{2} + \alpha_{\frac{p-1}{2}} \equiv \frac{2}{3} + \alpha_{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

A l'aide de la formule (17.) nous obtenons:

$$H(-p) \equiv \left(2 - \left(\frac{2}{p}\right)\right) \alpha_{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(2 - \left(\frac{2}{p}\right)\right) (-1)^{\frac{p+1}{4}} \cdot 2 \cdot B_{\frac{p+1}{4}} \pmod{p}.$$

Ce résultat était bien connu déjà par *Cauchy*, mais notre calcul donne le rapport, qui n'est pas si simple, entre les formules:

$$(\alpha) \qquad H(-p) = \left(2 - \left(\frac{2}{p}\right)\right) \cdot \frac{\Sigma b - \Sigma a}{p}$$

et

$$(\beta) \qquad H(-p) \equiv \sum_{m=1}^{m=\frac{p-1}{2}} \left(\frac{m}{p}\right) \pmod{p}.$$

A l'aide de la formule (α) nous pouvons démontrer la formule (β) par des discussions qui sont très simples et que nous ne réproduisons pas.

St.-Pétersbourg, janvier 1908.

Über einige Reihen-Entwicklungen, die nach Produkten von Kugelfunktionen fortschreiten.

Von Herrn *C. Neumann* in Leipzig.

§ 1.

Einleitung. Namentlich über eine neue Methode zur Ableitung der von F. Neumann mit (A.), (B.), (C.), (D.) *bezeichneten Formeln.*

Für die Kugelfunktionen $P_n = P_n(x)$ gelten bekanntlich die Formeln*):

$$\text{(A.)} \qquad (x^2-1)\,P_n' = n(xP_n - P_{n-1}),$$

$$\text{(B.)} \qquad (x^2-1)\,P_n' = -(n+1)(xP_n - P_{n+1}),$$

$$\text{(C.)} \qquad nP_n = xP_n' - P_{n-1}',$$

$$\text{(D.)} \qquad (n+1)P_n = -xP_n' + P_{n+1}';$$

und aus diesen Formeln ergeben sich die Relationen*):

$$\text{(I.)} \qquad (2n+1)\,xP_n = nP_{n-1} + (n+1)P_{n+1},$$

$$\text{(II.)} \qquad (2n+1)\,P_n = P_{n+1}' - P_{n-1}',$$

$$\text{(III.)} \qquad (2n+1)\,xP_n' = (n+1)P_{n-1}' + nP_{n+1}',$$

$$\text{(IV.)} \qquad (2n+1)(x^2-1)\,P_n' = n(n+1)(P_{n+1} - P_{n-1}).$$

---

*) *F. Neumann*, Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen, Leipzig bei Teubner. 1878. Daselbst S. 60, 61.

**) a. a. O. S. 61.

Sodann kann man weiter, auf Grund der Relation (II.), zu folgenden Entwicklungen gelangen*):

$$\text{(V.)} \quad \begin{cases} P_n' = (2n-1)P_{n-1} + (2n-5)P_{n-3} + (2n-9)P_{n-5}\cdots + 7P_3 + 3P_1, \\ P_n' = (2n-1)P_{n-1} + (2n-5)P_{n-3} + (2n-9)P_{n-5}\cdots + 5P_2 + P_0, \end{cases}$$

von denen die erste oder zweite zu nehmen ist, je nachdem die Zahl n gerade oder ungerade ist.

Mit (A.), (B.), (C.), (D.) und (I.), (II.), (III.), (IV.) analoge Formeln gelten für die Kugelfunktion zweiter Art:

$$\text{(VI.)} \qquad Q_n = Q_n(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(z)\,dz}{x-z}.$$

So z. B. sind folgende mit (I.), (II.), (III.), (IV.) parallel stehende Formeln zu notieren**):

$$\text{(VII.)} \qquad (2n+1)\,x\,Q_n = n\,Q_{n-1} + (n+1)\,Q_{n+1},$$

$$\text{(VIII.)} \qquad (2n+1)\,Q_n = Q_{n+1}' - Q_{n-1}',$$

$$\text{(IX.)} \qquad (2n+1)\,x\,Q_n' = (n+1)\,Q_{n-1}' + n\,Q_{n+1}',$$

$$\text{(X.)} \qquad (2n+1)\,(x^2-1)\,Q_n' = n(n+1)\,(Q_{n+1} - Q_{n-1}),$$

ferner folgende mit (V.) parallel stehende Formeln***):

$$\text{(XI.)} \quad \begin{cases} Q_n' - Q_0' = (2n-1)\,Q_{n-1} + (2n-5)\,Q_{n-3} + (2n-9)\,Q_{n-5}\cdots \\ \qquad\qquad + 7Q_3 + 3Q_1, \\ Q_n' - Q_1' = (2n-1)\,Q_{n-1} + (2n-5)\,Q_{n-3} + (2n-9)\,Q_{n-5}\cdots \\ \qquad\qquad + 9\,Q_4 + 5\,Q_2, \end{cases}$$

von denen die erste oder zweite gilt, je nachdem n gerade oder ungerade ist. —

---

*) a. a. O. S. 61, (2^a.), (2^b.).
**) a. a. O. S. 65, (I^b.), (II^b.), (III^b.), (IV^b.).
***) a. a. O. S. 66, (14^a.), (14^b.).

Daneben ist, was Q'_n anbelangt, noch folgende unendliche Reihe zu nennen*):

$$(XII.) \qquad Q'_n = -[(2n+3)\,Q_{n+1} + (3n+7)\,Q_{n+3} + (2n+11)\,Q_{n+5} + \cdots + \text{in inf.}],$$

welche konvergiert, falls $x > 1$ ist.

Von *F. Neumann* sind die vier Gleichungen (A.), (B.), (C.), (D.), abgeleitet worden aus der bekannten *Laplace-Jacobi*schen Integraldarstellung der Kugelfunktionen**). Man kann aber zu jenen Formeln, falls es beliebt, auch gelangen unmittelbar auf Grund der *eigentlichen Definition* der Kugelfunktionen, nämlich auf Grund der bekannten Formel:

$$(1.) \qquad \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1\mu}} = \sum_0^\infty \frac{\varrho^n}{\varrho_1^{n+1}} P_n(\mu), \quad (\varrho < \varrho_1).$$

Um hierauf näher einzugehen, setze man:

$$(2.) \qquad \begin{cases} x = \varrho\mu & = \varrho\ \cos\vartheta, \\ y = \varrho\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi & = \varrho\ \sin\vartheta\cos\varphi, \\ z = \varrho\sqrt{1-\mu^2}\ \sin\varphi & = \varrho\ \sin\vartheta\sin\varphi, \end{cases}$$

wo $\mu = \cos\vartheta$ ist. Alsdann sind ϱ, μ, φ bestimmte Funktionen von x, y, z, für deren partielle Ableitungen nach x sich die Werte ergeben:

$$(3.) \qquad \frac{\partial\varrho}{\partial x} = \mu, \quad \frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{1-\mu^2}{\varrho}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad \text{mithin } \frac{\partial(\varrho\mu)}{\partial x} = 1.$$

Man stelle sich nun die Aufgabe, die partielle Ableitung

$$(4.) \qquad \frac{\partial(\varrho^n P_n(\mu))}{\partial x}$$

---

*) a. a. O. S. 66, (15.). Dort ist ein störender Druckfehler vorhanden. Die beiden dort der Formel (15.) vorangehenden Zeilen müssen nämlich lauten: „*Aus* (II^b.) *ergibt sich für* Q'_n *eine unbegrenzte ...*“

**) a. a. O. S. 60.

zu berechnen. Zur Absolvierung dieser Aufgabe bieten sich zwei ganz verschiedene Wege dar.

Erstens: Der Weg direkter Rechnung. — Offenbar ist:

$$\frac{\partial(\varrho^n P_n(\mu))}{\partial x} = n\varrho^{n-1}\frac{\partial\varrho}{\partial x}P_n(\mu) + \varrho^n P_n'(\mu)\frac{\partial\mu}{\partial x},$$

also nach (3.):

$$\frac{\partial(\varrho^n P_n(\mu))}{\partial x} = n\varrho^{n-1}\mu P_n(\mu) + \varrho^{n-1}(1-\mu^2)P_n'(\mu). \tag{5.}$$

Zweitens: Der von der Reihenentwicklung (1.) *ausgehende Weg.* — Aus (1.) ergibt sich durch partielle Ableitung nach x:

$$-\left(\frac{1}{R}\right)^3\left(\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial x} - \varrho_1\frac{\partial(\varrho\mu)}{\partial x}\right) = \sum_0^\infty \frac{1}{\varrho_1^{n+1}}\frac{\partial(\varrho^n P_n(\mu))}{\partial x},$$

also mit Hinblick auf (3.):

$$-\left(\frac{1}{R}\right)^3(\varrho\mu - \varrho_1) = \sum_1^\infty \frac{1}{\varrho_1^{n+1}}\frac{\partial(\varrho^n P_n(\mu))}{\partial x}, \tag{6.}$$ *)

wo R die in (1.) angegebene Radix vorstellt. — Andererseits ergibt sich aus (1.) durch Differentiation nach ϱ_1:

$$-\left(\frac{1}{R}\right)^3(\varrho_1 - \varrho\mu) = -\sum_0^\infty \frac{(n+1)\varrho^n}{\varrho_1^{n+2}}P_n(\mu),$$

oder, falls man mit -1 multipliziert und zugleich das unter dem Summenzeichen stehende n durch $n-1$ ersetzt:

$$-\left(\frac{1}{R}\right)^3(\varrho\mu - \varrho_1) = \sum_1^\infty \frac{n\varrho^{n-1}}{\varrho_1^{n+1}}P_{n-1}(\mu). \tag{7.}$$

Die linken Seiten der Formeln (6.), (7.) sind aber unter einander identisch.

*) Als untere Grenze der Summe ist hier die 1 gesetzt, weil das dem $n=0$ entsprechende Glied verschwindet.

Gleiches muß daher auch von ihren rechten Seiten gelten. Somit folgt:

$$\frac{\partial(\varrho^n P_n(\mu))}{\partial x} = n\varrho^{n-1} P_{n-1}(\mu). \tag{8.}$$

Vergleichung der beiden Resultate. — Setzt man die auf beiden Wegen erhaltenen Resultate (5.) und (8.) einander gleich, so erhält man sofort:

$$n\mu P_n(\mu) + (1-\mu^2) P_n'(\mu) = n P_{n-1}(\mu). \tag{9.}$$

Dies aber ist die obige Formel (A.).

In ganz analoger Weise kann man zu den Formeln (B.) und (C.), (D.) dadurch gelangen, daß man an Stelle der Ableitung (4.) respektive die Ableitungen

$$\frac{\partial(\varrho^n P_n(\mu))}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P_n(\mu)}{\varrho^{n+1}}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P_n(\mu)}{\varrho^{n+1}}\right) \tag{10.}$$

ins Auge faßt; was hier nicht weiter ausgeführt werden soll.

Dies vorangeschickt, kann nun der eigentliche Inhalt der folgenden Paragraphen mit wenig Worten charakterisiert werden. Es handelt sich nämlich darum, die soeben in (1.), (2.), ... (10.) *angedeuteten Operationen von neuem zu wiederholen, aber nicht unter Anwendung der Polarkoordinaten, sondern unter Benutzung der elliptischen Koordinaten. In solcher Weise werden sich als dann, an Stelle der F. Neumannschen Formeln* (A.), (B.), (C.), (D.), *gewisse neue Formeln ergeben. Diese letzteren mögen kurzweg bezeichnet werden als die zu* (A.), (B.), (C.), (D.) *parallel stehenden Formeln.*

§ 2.

Die zu (A.) *parallelstehende Formel. Übergang zur Christoffelschen Formel.*

Die *elliptischen* Koordinaten ϱ, μ, φ sind mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z verbunden durch die Gleichungen:

$$(1.)\qquad \begin{cases} x = a\varrho\mu & = a\varrho\cos\vartheta, \\ y = a\sqrt{\varrho^2-1}\ \sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi = a\ \sqrt{\varrho^2-1}\ \sin\vartheta\ \cos\varphi, \\ z = a\sqrt{\varrho^2-1}\ \sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi = a\ \sqrt{\varrho^2-1}\ \sin\vartheta\ \sin\varphi, \end{cases}$$

wo $\mu = \cos\vartheta$ ist, während a eine beliebig gegebene positive Konstante vorstellt. Diese Konstante repräsentiert den Abstand der beiden Brennpunkte A und A' vom Anfangspunkt des Koordinatensystems*). Auf Grund der Formeln (1.) sind ϱ, μ, φ bestimmte Funktionen von x, y, z, deren partielle Ableitungen nach x die Werte haben:

$$(2.)\qquad \frac{\partial\varrho}{\partial x} = \frac{\mu(\varrho^2-1)}{a(\varrho^2-\mu^2)},\quad \frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{\varrho(1-\mu^2)}{a(\varrho^2-\mu^2)},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0;$$

woraus folgt:

$$(3.)\qquad \frac{\partial(\varrho\mu)}{\partial x} = \frac{1}{a} \text{ und } \varrho\frac{\partial\varrho}{\partial x} + \mu\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{\varrho\mu}{a}.$$

Markiert man auf der positiven x-Achse, und zwar außerhalb der beiden Brennpunkte A, A', irgend einen Punkt $(\varrho_1, \mu_1, \varphi_1)$, so wird offenbar $\mu_1 = 1$ und φ_1 unbestimmt sein. Bezeichnet man daher den Abstand dieses Punktes $(\varrho_1, \mu_1, \varphi_1)$ von einem im Raume ganz beliebig gewählten Punkte (ϱ, μ, φ) mit E, so gelten folgende Formeln**):

$$(4.)\qquad \frac{a}{E} = \frac{1}{\sqrt{-2+(\varrho^2+\varrho_1^2+\mu^2+1)-2\varrho\varrho_1\mu}}$$

und

$$(5.)\qquad \frac{a}{E} = \sum_0^\infty \left(\frac{2n+1}{2}\right) P_n(\varrho)\, P_n(\mu)\, Q_n(\varrho_1)\, P_n(1), \quad \text{(falls } \varrho < \varrho_1\text{)}.$$

Beachtet man, daß $P_n(1) = 1$ ist, so ergibt sich aus (4.) und (5.) sofort:

$$(6.)\qquad \frac{1}{\sqrt{-1+(\varrho^2+\varrho_1^2+\mu^2)-2\varrho\varrho_1\mu}} = \sum_0^\infty \left(\frac{2n+1}{2}\right) U_n\, Q_n(\varrho_1), \quad (\varrho < \varrho_1)$$

---

*) *F. Neumanns* Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, Leipzig bei Teubner, 1887. Vgl. daselbst S. 327, (1.), sowie auch die Figur S. 328.

**) a. a. O. S. 341, (33.), (34.) ff.

wo U_n die Bedeutung hat:

$$U_n = P_n(\varrho)\, P_n(\mu). \tag{7.}$$

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die partielle Ableitung $\frac{\partial U_n}{\partial x}$ zu berechnen. Zur Absolvierung dieser Aufgabe bieten sich zwei ganz verschiedene Wege dar.

Erstens: Der Weg direkter Rechnung. — Nach (7.) ist:

$$\frac{\partial U_n}{\partial x} = P_n(\mu)\, P_n'(\varrho)\frac{\partial \varrho}{\partial x} + P_n(\varrho)\, P_n'(\mu)\frac{\partial \mu}{\partial x},$$

also nach (2.)

$$\frac{\partial U_n}{\partial x} = \frac{1}{a(\varrho^2-\mu^2)}[\mu(\varrho^2-1)\, P_n(\mu)\, P_n'(\varrho) + \varrho(1-\mu^2)\, P_n(\varrho)\, P_n'(\mu)],$$

das ist:

$$\frac{\partial U_n}{\partial x} = \frac{\Omega}{a(\varrho^2-\mu^2)}, \text{ wo } \Omega = -\mu\, P_n(\mu)\cdot(1-\varrho^2)\, P_n'(\varrho) + \varrho\, P_n(\varrho)\cdot(1-\mu^2)\, P_n'(\mu). \tag{8.}$$

Nun ist nach (I.) § 1 und (IV.) § 1:

$$(2n+1)\,\mu\, P_n(\mu) = n\, P_{n-1}(\mu) + (n+1)\, P_{n+1}(\mu),$$

$$(2n+1)(1-\varrho^2)\, P_n'(\varrho) = n(n+1)[P_{n-1}(\varrho) - P_{n+1}(\varrho)];$$

woraus durch Multiplikation folgt:

$$\mu\, P_n(\mu)\cdot(1-\varrho^2)\, P_n'(\varrho) = \left(\frac{n(n+1)}{(2n+1)^2}\right)\begin{vmatrix} n\, P_{n-1}(\mu)\, P_{n-1}(\varrho) & -(n+1)\, P_{n+1}(\mu)\, P_{n+1}(\varrho) \\ +(n+1)\, P_{n+1}(\mu)\, P_{n-1}(\varrho) & -n\, P_{n-1}(\mu)\, P_{n+1}(\varrho) \end{vmatrix}.$$

Subtrahiert man diese Formel von derjenigen, welche aus ihr durch gegenseitige Vertauschung von ϱ und μ sich ergibt, so erhält man, unter Anwendung der in (8.) eingeführten Abbreviatur Ω:

$$\Omega = \left(\frac{n(n+1)}{(2n+1)^2}\right)(2n+1)\,[P_{n+1}(\varrho)\,P_{n-1}(\mu) - P_{n+1}(\mu)\,P_{n-1}(\varrho)].$$

Substituiert man endlich diesen Wert von Ω in die Formel (8.), so entsteht:

$$(9.) \qquad \frac{\partial U_n}{\partial x} = \left(\frac{n(n+1)}{2n+1}\right)\frac{P_{n+1}(\varrho)\,P_{n-1}(\mu) - P_{n+1}(\mu)\,P_{n-1}(\varrho)}{a(\varrho^2-\mu^2)},$$

also z. B.:

$$(10.) \qquad \frac{\partial U_0}{\partial x} = 0.$$

Zweitens: Der von der Entwicklung (6.) *ausgehende Weg.* — Aus (6.) folgt durch partielle Ableitung nach x:

$$-\left(\frac{1}{R}\right)^3\left(\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial x} + \mu\frac{\partial\mu}{\partial x} - \varrho_1\frac{\partial(\varrho\mu)}{\partial x}\right) = \sum_0^x\left(\frac{2n+1}{2}\right)\frac{\partial U_n}{\partial x}\,Q_n(\varrho_1),$$

also mit Hinblick auf (2.), (3.):

$$(11.) \qquad -\left(\frac{1}{R}\right)^3\frac{\varrho\mu - \varrho_1}{a} = \sum_0^x\left(\frac{2n+1}{2}\right)\frac{\partial U_n}{\partial x}\,Q_n(\varrho_1),$$

wo R die in (6.) stehende Radix bezeichnet. — Andererseits ergibt sich aus (6.) durch Differentiation nach ϱ_1:

$$(12.) \qquad -\left(\frac{1}{R}\right)^3(\varrho_1 - \varrho\mu) = \sum_0^x\left(\frac{2n+1}{2}\right)U_n\,Q_n'(\varrho_1).$$

Nunmehr folgt aus (11.) und (12.) sofort:

$$(13.) \qquad \sum_0^x\left(\frac{2n+1}{2}\right)\frac{\partial U_n}{\partial x}\,Q_n(\varrho_1) = -\frac{1}{a}\sum_0^\infty\left(\frac{2n+1}{2}\right)U_n\,Q_n'(\varrho_1).$$

Substituiert man aber hier, in (13.), für $Q_n'(\varrho_1)$ die in (XII.) § 1 gegebene Entwicklung:

$$Q_n'(\varrho_1) = -[(2n+3)\,Q_{n+1}(\varrho_1) + (2n+7)\,Q_{n+3}(\varrho_1) + (2n+11)\,Q_{n+5}(\varrho_1) + \cdots],$$

so erhält man eine Formel, deren beide Seiten nach den Funktionen $Q_n(\varrho_1)$ fortschreiten. Die Koeffizienten dieser Funktionen müssen einzeln einander gleich sein*). Demgemäß gelangt man zu folgenden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
a\frac{\partial U_0}{\partial x} &= 0,\\
a\frac{\partial U_1}{\partial x} &= U_0,\\
a\frac{\partial U_2}{\partial x} &= 3U_1,\\
a\frac{\partial U_3}{\partial x} &= 5U_2 + U_0,\\
a\frac{\partial U_4}{\partial x} &= 7U_3 + 3U_1,\\
a\frac{\partial U_5}{\partial x} &= 9U_4 + 5U_2 + U_0,\\
a\frac{\partial U_6}{\partial x} &= 11U_5 + 7U_3 + 3U_1,\\
&\text{etc. etc. etc.}
\end{aligned}
\tag{14.}
$$

Folglich ist:

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} = 0, \tag{15.}$$

sonst aber für jedwedes $n > 0$:

$$\frac{\partial U_n}{\partial x} = \frac{1}{a}\left[(2n-1)\,U_{n-1} + (2n-5)\,U_{n-3} + (2n-9)\,U_{n-5} + \cdots\right], \tag{16.}$$

der Art, daß das letzte Glied dieser Reihe mit U_1 oder U_0 behaftet sein wird, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Vergleichung der beiden Resultate. — Vergleicht man die auf beiden Wegen erhaltenen Resultate (9.), (10.) und (15.), (16.) miteinander, so gelangt man, $n > 0$ gedacht, zu folgender Formel:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{n(n+1)}{2n+1}\right)\frac{P_{n+1}(\varrho)\,P_{n-1}(\mu) - P_{n+1}(\mu)\,P_{n-1}(\varrho)}{\varrho^2 - \mu^2} &= (2n-1)\,U_{n-1}\\
&\quad + (2n-5)\,U_{n-3} + (2n-9)\,U_{n-5} + \cdots,\ (n>0),
\end{aligned}
\tag{17.}
$$

*) Diese Behauptung rechtfertigt sich hier durch ihren Erfolg. Inwieweit man sie *a priori* zu beweisen imstande ist, mag einstweilen dahingestellt bleiben.

wo U_n nur Abbreviatur ist, und die Bedeutung hat:

$$(18.) \qquad U_n = P_n(\varrho)\, P_n(\mu).$$

Wir haben hier diese zu (A.) *parallel stehende Formel* (17.) *nur für den Fall bewiesen, daß* ϱ *und* μ *den Bedingungen* $\varrho \geqq 1$ *und* $-1 \leqq \mu \leqq +1$ *entsprechen**). *Doch erkennt man leicht, daß sie allgemein gültig ist für ganz beliebige Werte von* ϱ *und* μ.

Macht man insbesondere $\varrho = \mu$, so geht die allgemeine Formel (17.) über in:

$$(19.) \quad \begin{cases} \left(\frac{n(n+1)}{2n+1}\right) \frac{P'_{n+1}(\mu)\, P_{n-1}(\mu) - P_{n+1}(\mu)\, P'_{n-1}(\mu)}{2\mu} \\ \qquad = (2n-1)\,[P_{n-1}(\mu)]^2 + (2n-5)\,[P_{n-3}(\mu)]^2 \\ \qquad\qquad + (2n-9)\,[P_{n-5}(\mu)]^2 + \cdots, \ (n>0). \end{cases}$$

Ferner geht die allgemeine Formel (17.) für $\varrho = 1$ über in:

$$(20.) \quad \begin{cases} \left(\frac{n(n+1)}{2n+1}\right) \frac{P_{n-1}(\mu) - P_{n+1}(\mu)}{1-\mu^2} = (2n-1)\, P_{n-1}(\mu) \\ \qquad + (2n-5)\, P_{n-3}(\mu) + (2n-9)\, P_{n-5}(\mu) + \cdots, \ (n>0). \end{cases}$$

Die rechte Seite dieser Formel (20.) ist, nach (V.) § 1, nichts anderes als $P'_n(\mu)$. Dies aber in (20.) substituiert, gelangt man zu einer Formel, die identisch ist mit der von *F. Neumann* gegebenen Formel (IV.) § 1.

Bezeichnet man für den Augenblick die Funktionen $P_n(\varrho)$ und $P_n(\mu)$ kurzweg mit R_n und M_n, so ist nach (I.) § 1:

$$(21.) \qquad (2n+1)\,\varrho\, R_n = n\, R_{n-1} + (n+1)\, R_{n+1},$$

$$(22.) \qquad (2n+1)\,\mu\, M_n = n\, M_{n-1} + (n+1)\, M_{n+1}.$$

---

*) In der Tat beruht unsere Untersuchung auf gewissen geometrischen Vorstellungen. Diese Vorstellungen aber bringen mit sich, daß $\varrho \geqq 1$ und $-1 \leqq \mu \leqq +1$ ist.

Hieraus folgt durch Multiplikation mit M_{n-1} und $-R_{n-1}$, und Addition:

$$(23.)\quad (2n+1)(\varrho R_n M_{n-1} - \mu M_n R_{n-1}) = (n+1)(R_{n+1} M_{n-1} - M_{n+1} R_{n-1}).$$

Ferner ergibt sich aus (21.), (22.) durch Anwendung der Faktoren M_{n+1} und $-R_{n+1}$:

$$(2n+1)(\varrho R_n M_{n+1} - \mu M_n R_{n+1}) = n(R_{n-1} M_{n+1} - M_{n-1} R_{n+1}),$$

oder, falls man n durch $n-1$ ersetzt:

$$(24.)\quad (2n-1)(\varrho R_{n-1} M_n - \mu M_{n-1} R_n) = (n-1)(R_{n-2} M_n - M_{n-2} R_n).$$

Dividiert man die Formeln (23.) und (24.) respektive durch $2n+1$ und durch $-(2n-1)$, so erhält man:

$$(25.)\quad \varrho R_n M_{n-1} - \mu M_n R_{n-1} = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)(R_{n+1} M_{n-1} - M_{n+1} R_{n-1}),$$

$$(26.)\quad \mu R_n M_{n-1} - \varrho M_n R_{n-1} = \left(\frac{n-1}{2n-1}\right)(R_n M_{n-2} - M_n R_{n-2}).$$

Die rechten Seiten dieser beiden Formeln (25.), (26.) sind aber sofort entwickelbar auf Grund des allgemeinen Satzes (17.). In solcher Weise ergibt sich:

$$(27.)\quad \varrho R_n M_{n-1} - \mu M_n R_{n-1} = \left(\frac{\varrho^2-\mu^2}{n}\right)[(2n-1) U_{n-1} + (2n-5) U_{n-3} + \cdots],$$

$$(28.)\quad \mu R_n M_{n-1} - \varrho M_n R_{n-1} = \left(\frac{\varrho^2-\mu^2}{n}\right)[(n-3) U_{n-2} + (2n-7) U_{n-5} + \cdots].$$

Nunmehr folgt aus (27.), (28.) durch Addition:

$$(29.)\quad (\varrho+\mu)(R_n M_{n-1} - M_n R_{n-1}) = \left(\frac{\varrho^2-\mu^2}{n}\right)[(2n-1) U_{n-1} + (2n-3) U_{n-2} + \cdots],$$

oder, falls man durch $\varrho^2-\mu^2$ dividiert und zugleich für die R_n, M_n ihre eigentlichen Bedeutungen substituiert:

$$(30.)\quad \begin{cases} \dfrac{P_n(\varrho)P_{n-1}(\mu)-P_n(\mu)P_{n-1}(\varrho)}{\varrho-\mu} \\ = \dfrac{1}{n}[(2n-1)U_{n-1}+(2n-3)U_{n-2}+(2n-5)U_{n-3}+\cdots+5U_2+3U_1+U_0], \end{cases}$$

wo $U_n=P_n(\varrho)P_n(\mu)$ ist. *Dies aber ist die 1858 von Christoffel gefundene Formel**).

§ 3.

Die zu (B.) *parallel stehende Formel. Übergang zu einer gewissen Formel, die zu bezeichnen ist als ein Analogon zur Christoffelschen Formel.*

Wir halten fest an den geometrischen Vorstellungen des vorigen Paragraphen; so daß also die dortigen Formeln (1.), (2.), (3.), (4.) ungeändert fortbestehen. Nun wollen wir gegenwärtig nicht $\varrho<\varrho_1$, sondern umgekehrt $\varrho_1<\varrho$ uns denken. Alsdann haben wir, an Stelle der dortigen Formeln (4.), (5.), folgende Formeln:

$$(4.)\qquad \frac{a}{E}=\frac{1}{\sqrt{-2+(\varrho^2+\varrho_1^2+\mu^2+1)-2\varrho\,\varrho_1\,\mu}}$$

und

$$(5.)\qquad \frac{a}{E}=\sum_0^\infty\Big(\frac{2n+1}{2}\Big)Q_n(\varrho)\,P_n(\mu)\,P_n(\varrho_1)\,P_n(1),\ (\varrho_1<\varrho).$$

Es ist aber $P_n(1)=1$. Somit folgt aus (4.) und (5.):

$$(6.)\qquad \frac{1}{\sqrt{-1+(\varrho^2+\varrho_1^2+\mu^2)-2\varrho\,\varrho_1\,\mu}}=\sum_0^\infty\Big(\frac{2n+1}{2}\Big)V_n\,P_n(\varrho_1),\ (\varrho_1<\varrho),$$

wo V_n die Bedeutung hat:

$$(7.)\qquad V_n=Q_n(\varrho)\,P_n(\mu).$$

*) Dieses Journal, Bd. 55, Seite 73 (44.). Man vgl. auch *Heines* Handbuch der Kugelfunktionen. Zweite Auflage. I. Band, Seite 197, 198.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die partielle Ableitung $\frac{\partial V_n}{\partial x}$ zu berechnen. Zur Erreichung dieses Zieles eröffnen sich uns zwei Wege.

Erstens: der Weg direkter Rechnung. — Nach (7.) ist:

$$\frac{\partial V_n}{\partial x} = P_n(\mu)\, Q_n'(\varrho)\frac{\partial \varrho}{\partial x} + Q_n(\varrho)\, P_n'(\mu)\frac{\partial \mu}{\partial x},$$

also nach § 2 (2.):

$$\frac{\partial V_n}{\partial x} = \frac{1}{a(\varrho^2-\mu^2)}[\mu\,(\varrho^2-1)\,P_n(\mu)\,Q_n'(\varrho) + \varrho\,(1-\mu^2)\,Q_n(\varrho)\,P_n'(\mu)],$$

d. i.

$$(8.)\qquad \frac{\partial V_n}{\partial x} = \frac{\Omega}{a\,(\varrho^2-\mu^2)},\ \text{wo}\ \Omega = -\mu\,P_n(\mu)\cdot(1-\varrho^2)\,Q_n'(\varrho) + \varrho\,Q_n(\varrho)\cdot(1-\mu^2)\,P_n'(\mu).$$

Nun ist nach (I.) § 1 und (X.) § 1:

$$(\alpha.)\qquad (2n+1)\,\mu\,P_n(\mu) = n\,P_{n-1}(\mu) + (n+1)\,P_{n+1}(\mu),$$

$$(\beta.)\qquad (2n+1)\,(1-\varrho^2)\,Q_n'(\varrho) = n(n+1)\,[Q_{n-1}(\varrho) - Q_{n+1}(\varrho)];$$

woraus durch Multiplikation sich ergibt:

$$(\gamma.)\quad \mu\,P_n(\mu)\cdot(1-\varrho^2)\,Q_n'(\varrho) = \left(\frac{n(n+1)}{(2n+1)^2}\right)\begin{vmatrix} n\,P_{n-1}(\mu)\,Q_{n-1}(\varrho) \\ -(n+1)\,P_{n+1}(\mu)\,Q_{n+1}(\varrho) \\ +(n+1)\,P_{n+1}(\mu)\,Q_{n-1}(\varrho) \\ -n\,P_{n-1}(\mu)\,Q_{n+1}(\varrho) \end{vmatrix}.$$

Die für die $P(\mu)$ hingestellte Formel ($\alpha.$) ist aber, nach (VII.) § 1, auch gültig für $Q(\varrho)$. Desgleichen wird die für die $Q(\varrho)$ gebildete Formel ($\beta.$), nach (IV.) § 1, auch gültig sein für $P(\mu)$. Bezeichnet man nun diese beiden neuen Formeln mit ($\alpha_1.$) und ($\beta_1.$), und ihr Produkt mit ($\gamma_1.$), so wird, wie man leicht übersieht, diese Formel ($\gamma_1.$) folgendermaßen lauten:

$$(\gamma_1.)\quad \varrho\, Q_n(\varrho)\cdot(1-\mu^2)\, P_n'(\mu)=\left(\frac{n(n+1)}{(2n+1)^2}\right)\left\{\begin{array}{l} n\, Q_{n-1}(\varrho)\, P_{n-1}(\mu) \\ -(n+1)\, Q_{n+1}(\varrho)\, P_{n+1}(\mu) \\ +(n+1)\, Q_{n+1}(\varrho)\, P_{n-1}(\mu) \\ -n\, Q_{n-1}(\varrho)\, P_{n+1}(\mu) \end{array}\right\}.$$

Subtrahiert man jetzt $(\gamma.)$ von $(\gamma_1.)$, so erhält man, unter Anwendung der in (8.) eingeführten Abbreviatur Ω, sofort:

$$\Omega=\left(\frac{n(n+1)}{(2n+1)^2}\right)(2n+1)[Q_{n+1}(\varrho)\, P_{n-1}(\mu)-P_{n+1}(\mu)\, Q_{n-1}(\varrho)].$$

Substituiert man endlich diesen Wert von Ω in (8.), so erhält man für $n>0$:

$$(9.)\quad \frac{\partial V_n}{\partial x}=\left(\frac{n(n+1)}{(2n+1)}\right)\frac{Q_{n+1}(\varrho)\, P_{n-1}(\mu)-P_{n+1}(\mu)\, Q_{n-1}(\varrho)}{a(\varrho^2-\mu^2)},\quad (n>0).$$

Für $n=0$ ist nämlich diese Formel *ungültig;* was darin seinen Grund hat, daß die bei Ableitung derselben benutzte Gleichung $(\beta.)$, wie man leicht erkennt, für $n=0$ *uubrauchbar* wird. — Übrigens kann man die hier vorhandene Lücke leicht ausfüllen. Man findet*):

$$(10.)\qquad \frac{\partial V_0}{\partial x}=-\frac{2\mu}{a(\varrho^2-\mu^2)}.$$

Zweitens: Der von der Entwicklung (6.) *ausgehende Weg.* — Ebenso wie die *frühere* Entwicklung (6.) § 2 zur Formel (13.) § 2 führte, in genau

---

*) Nach (7.) ist $V_0=Q_0(\varrho)\, P_0(\mu)$, das ist $=Q_0(\varrho)$, also [nach *F. Neumanns* Vorlesungen; S. 314, 315]: $V_0=\log\left(\frac{\varrho+1}{\varrho-1}\right)$. Hieraus folgt:

$$\frac{\partial V_0}{\partial x}=-\left(\frac{2}{\varrho^2-1}\right)\frac{\partial \varrho}{\partial x},$$

also nach § 2 (2.):

$$\frac{\partial V_0}{\partial x}=-\frac{2\mu}{a(\varrho^2-\mu^2)},\ -\text{ q. e. d.}$$

derselben Weise wird offenbar die *gegenwärtige* Entwicklung (6.) zu folgender Formel führen*):

$$(11.)\qquad \sum_0^\infty \left(\frac{2n+1}{2}\right) \frac{\partial V_n}{\partial x} P_n(\varrho_1) = -\frac{1}{a} \sum_0^\infty \left(\frac{2n+1}{2}\right) V_n P_n'(\varrho_1).$$

Denkt man sich aber hier für $P_n'(\varrho_1)$ das in (V.) § 1 angegebene Polynom substituiert:

$$P_n'(\varrho_1) = (2n-1) P_{n-1}(\varrho_1) + (2n-5) P_{n-3}(\varrho_1) + (2n-9) P_{n-5}(\varrho_1) + \cdots,$$

so hat man eine Formel vor Augen, in welcher beide Seiten nach den $P_n(\varrho_1)$ fortschreiten. Und durch Gleichsetzung der betreffenden Koeffizienten gelangt man zu folgenden Formeln:

$$(12.)\quad \begin{aligned} a\frac{\partial V_0}{\partial x} &= -[3V_1 + 7V_3 + 11V_5 + 15V_7 + \cdots],\\ a\frac{\partial V_1}{\partial x} &= -[5V_2 + 9V_4 + 13V_6 + 17V_8 + \cdots],\\ a\frac{\partial V_2}{\partial x} &= -[7V_3 + 11V_5 + 15V_7 + 19V_9 + \cdots],\\ a\frac{\partial V_3}{\partial x} &= -[9V_4 + 13V_6 + 17V_8 + 21V_{10} + \cdots],\\ &\text{etc. etc. etc.} \end{aligned}$$

Folglich ist für jedwedes n (auch für $n=0$):

$$(13.)\quad a\frac{\partial V_n}{\partial x} = -[(2n+3) V_{n+1} + (2n+7) V_{n+3} + (2n+11) V_{n+5} + \cdots].$$

Vergleichung der beiden Resultate. — Aus (9.) und (13.) erhält man für $n > 0$

$$(14.)\quad \begin{cases} \left(\frac{n(n+1)}{2n+1}\right) \frac{Q_{n+1}(\varrho) P_{n-1}(\mu) - Q_{n-1}(\varrho) P_{n+1}(\mu)}{\varrho^2 - \mu^2} = \\ -[(2n+3) V_{n+1} + (2n+7) V_{n+3} + (2n+11) V_{n+5} + \cdots], \quad (n>0), \end{cases}$$

*) Der einzige Unterschied zwischen damals und jetzt besteht darin, daß an Stelle der U und $Q(\varrho_1)$ gegenwärtig die V und $P(\varrho_1)$ getreten sind.

wo V_n nur als Abbreviatur dient, nämlich die Bedeutung hat:

$$(15.) \qquad V_n = Q_n(\varrho)\, P_n(\mu).$$

Zugleich gelangt man für den singulären Fall $n=0$, durch Vergleichung der Formel (10.) und der ersten der Formeln (12.), zu folgendem Resultat:

$$(16.) \qquad \frac{2\mu}{\varrho^2-\mu^2} = 3\,V_1 + 7\,V_3 + 11\,V_5 + 15\,V_7 + \cdots.$$

Wir haben hier diese zu (B.) *parallel stehenden Formeln* (14.), (16.) *nur für den Fall bewiesen, daß* ϱ *und* μ *den Bedingungen* $\varrho \geqq 1$ *und* $-1 \leqq \mu \leqq +1$ *entsprechen**). *Doch erkennt man leicht, daß diese Formeln stets gültig sein werden, falls nur die betreffenden Reihen konvergent sind. Eine solche Konvergenz aber wird, ebenso wie bei der bekannten Heineschen Reihe***):

$$(H.) \qquad \frac{1}{\varrho-\mu} = \sum_0^\infty \left(\frac{2n+1}{2}\right) Q_n(\varrho)\, P_n(\mu) = \sum_0^\infty \left(\frac{2n+1}{2}\right) V_n,$$

stets stattfinden, falls nur $\mathbf{abs}\,\varrho > \mathbf{abs}\,\mu$ *ist****).

---

*) Vgl. in § 2 die dort zwischen (18.) und (19.) beigefügte Note.

**) Die Reihe wurde von *Heine* aufgestellt im Jahre 1851. Vgl. *Heines* Handbuch der Kugelfunktionen, zweite Auflage, Bd. 1, Seite 78. — Allerdings ist diese Reihe als spezieller Fall schon mitenthalten in den *F. Neumann*schen Untersuchungen von 1847. Vgl. *F. Neumanns* Vorl. über Potential und Kugelfunktionen Seite 330 (6.), sowie auch die Note auf Seite 310.

***) Man kann noch einen Schritt weitergehen, nämlich *komplexe* Werte von ϱ und μ in Betracht ziehen. Alsdann werden die Formeln (14.) und (16.), ebenso wie die *Heine*sche Reihe (H.), stets konvergent und gültig sein, falls nur ϱ und μ der *Heine*schen Bedingung

$$\mathrm{mod}\left(\varrho + \sqrt{\varrho^2-1}\right) > \mathrm{mod}\left(\mu + \sqrt{\mu^2-1}\right)$$

entsprechen. Dabei ist hinsichtlich der Vorzeichen von $\sqrt{\varrho^2-1}$ und $\sqrt{\mu^2-1}$ vorauszusetzen, diese Vorzeichnen seien so gewählt, daß jeder der beiden Moduln >1 ist. [Vgl. *Heines* Handbuch der Kugelfunktionen, erste Auflage, Seite 105, ff; zweite Auflage, Bd. 1, S. 197 (11.) ff.]

Man kann die Formel (16.) leicht kontrollieren. Bildet man nämlich die *Heine*sche Formel (H.) einmal für μ, das andere Mal für $-\mu$ und beachtet man zugleich, daß der in V_n enthaltene Faktor $P_n(\mu)$ die Eigenschaft besitzt: $P_n(-\mu) = (-1)^n P_n(\mu)$, so gelangt man durch Subtraktion dieser beiden Formeln sofort zur Formel (16.).

Auch die Formel (14.) kann man, z. B. für $n=1$, leicht kontrollieren; usw.

Bezeichnet man für den Augenblick die Funktionen $Q_n(\varrho)$ und $P_n(\mu)$ kurzweg mit R_n und M_n, so ist nach (VII.) § 1 und (I.) § 1:

$$(17.) \qquad (2n+1)\,\varrho\,R_n = n\,R_{n-1} + (n+1)\;R_{n+1},$$

$$(18.) \qquad (2n+1)\,\mu\,M_n = n\,M_{n-1} + (n+1)\,M_{n+1}.$$

Hieraus folgt genau ebenso wie im vorigen Paragraphen [vgl. den dortigen Übergang von (21.), (22.) zu (25.), (26.)]:

$$(19.) \quad \varrho\,R_n M_{n-1} - \mu\,M_n R_{n-1} = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)(R_{n+1}\,M_{n-1} - M_{n+1}\,R_{n-1}),$$

$$(20.) \quad \mu\,R_n M_{n-1} - \varrho\,M_n R_{n-1} = \left(\frac{n-1}{2n-1}\right)(R_n\,M_{n-2} - M_n\,R_{n-2}).$$

Die rechten Seiten dieser beiden letzten Formeln sind, auf Grund des Satzes (14.), in unendliche Reihen entwickelbar. Man erhält in solcher Weise:

$$(21.) \quad \varrho\,R_n M_{n-1} - \mu\,M_n R_{n-1} = -\left(\frac{\varrho^2-\mu^2}{n}\right)[(2n+3)\,V_{n+1} + (2n+7)\,V_{n+3} + \cdots],$$

$$(22.) \quad \mu\,R_n M_{n-1} - \varrho\,M_n R_{n-1} = -\left(\frac{\varrho^2-\mu^2}{n}\right)[(2n+1)\,V_n + (2n+5)\,V_{n+2} + \cdots];$$

woraus durch Addition sich ergibt:

$$(23.)\quad (\varrho+\mu)(R_n M_{n-1} - M_n R_{n-1}) = -\left(\frac{\varrho^2-\mu^2}{n}\right)[(2n+1)V_n + (2n+3)V_{n+1}+\cdots].$$

Dividiert man aber diese Formel (23.) durch $\varrho^2-\mu^2$, und ersetzt man zugleich die R, M durch ihre eigentlichen Bedeutungen, so erhält man:

$$(24.)\quad \begin{cases} \dfrac{Q_u(\varrho)P_{n-1}(\mu) - P_n(\mu)Q_{n-1}(\varrho)}{\varrho-\mu} \\ = -\dfrac{1}{n}[(2n+1)V_n + (2n+3)V_{n+1} + (2n+5)V_{n+2}+\cdots], \end{cases}$$

wo $V_n = Q_n(\varrho)P_n(\mu)$ ist. — Diese Formel (24.) aber ist zu bezeichnen als *ein Analogon zur Christoffelschen Formel* [§ 2. (30.)].

§ 4.

Die zu (C.) *parallel stehende Formel.*

Wir wollen uns von neuem in die Vorstellungen des § 2 hineinversetzen, so daß wir also z. B. folgende Formel vor uns haben [vgl. § 2 (6.)]:

$$(1.)\quad \frac{1}{\sqrt{-1+(\varrho^2+\varrho_1^2+\mu^2)-2\varrho\varrho_1\mu}} = \sum_0^\infty \left(\frac{2n+1}{2}\right) U_n Q_n(\varrho_1),\ (\varrho<\varrho_1),$$

wo U_n die Bedeutung hat:

$$(2.)\quad U_n = P_n(\varrho)P_n(\mu).$$

Wir wollen gegenwärtig aber nicht $\frac{\partial U_n}{\partial x}$, sondern $\frac{\partial U_n}{\partial y}$ zu berechnen suchen. Zur Erreichung dieses Zieles eröffnen sich uns zwei verschiedene Wege.

Erstens: Der Weg direkter Rechnung. — Nach (2.) ist:

$$\frac{\partial U_n}{\partial y} = P_n(\mu)P_n'(\varrho)\frac{\partial\varrho}{\partial y} + P_n(\varrho)P_n'(\mu)\frac{\partial\mu}{\partial y},$$

oder, falls man die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \varrho}{\partial y}$ und $\frac{\partial \mu}{\partial y}$ [auf Grund der Formeln § 2 (1.)] wirklich berechnet:

$$(3.) \qquad \frac{\partial U_n}{\partial y} = \left(\frac{\sin\vartheta \cos\varphi \sqrt{\varrho^2 - 1}}{a(\varrho^2 - \mu^2)}\right)[\varrho P_n'(\varrho) P_n(\mu) - \mu P_n'(\mu) P_n(\varrho)].$$

Zweitens: Der von der Entwicklung (1.) *ausgehende Weg.* — Aus der Formel (1.) folgt durch partielle Ableitung nach y:

$$-\left(\frac{1}{R}\right)^3 \left(\varrho \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \mu \frac{\partial \mu}{\partial y} - \varrho_1 \frac{\partial(\varrho\mu)}{\partial y}\right) = \sum_0^\infty \left(\frac{2n+1}{2}\right) \frac{\partial U_n}{\partial y} Q_n(\varrho_1), \quad (\varrho < \varrho_1),$$

oder, falls man die Rechnung weiter ausführt:

$$(4.) \qquad -\left(\frac{1}{R}\right)^3 \left(\frac{\sin\vartheta \cos\varphi \sqrt{\varrho^2 - 1}}{a}\right) = \sum_0^\infty \left(\frac{2n+1}{2}\right) \frac{\partial U_n}{\partial y} Q_n(\varrho_1), \quad (\varrho < \varrho_1),$$

wo R die in (1.) stehende Radix bezeichnet.

Um weiter zu gelangen, muß man jetzt zurückgreifen zu der allgemeinen *F. Neumann*schen Formel für $\frac{a}{E}$. Man bilde diese allgemeine Formel*) nur allein unter der Voraussetzung, daß $\varrho < \varrho_1$ ist, differentiiere dieselbe nach φ, dividiere sodann durch $\sqrt{1-\mu_1^2}$ und mache endlich $\mu_1 = 1$. In solcher Weise gelangt man, was hier nicht weiter ausgeführt werden soll, zu folgender Formel:

$$(5.) \qquad -\left(\frac{1}{R}\right)^3 = \sum_1^\infty \left(\frac{2n+1}{2n(n+1)}\right) \mathfrak{U}_n Q_n'(\varrho_1),$$

wo $\mathfrak{U}_n$ die Bedeutung hat:

---

*) *F. Neumann*s Vorlesungen über Potential und Kugelfunktionen, S. 341 (33.), (34.).

$$(6.) \qquad \mathfrak{U}_n = P_n'(\varrho)\, P_n'(\mu),$$

während R dieselbe Bedeutung hat wie in (4.).

Aus (4.) und (5.) folgt nun, durch Elimination von R, sofort:

$$(7.) \quad \sum_0^\infty \left(\frac{2n+1}{2}\right) \frac{\partial U_n}{\partial y}\, Q_n(\varrho_1) = \left(\frac{\sin\vartheta\cos\varphi\sqrt{\varrho^2-1}}{a}\right) \sum_1^\infty \left(\frac{2n+1}{2n(n+1)}\right) \mathfrak{U}_n\, Q_n'(\varrho_1).$$

Substituiert man aber hier für $Q_n'(\varrho_1)$ die in (XII.) § 1 angegebene Entwicklung:

$$Q_n'(\varrho_1) = -\left[(2n+3)\, Q_{n+1}(\varrho_1) + (2n+7)\, Q_{n+3}(\varrho_1) + \cdots\right],$$

und setzt man in der so entstehenden Formel die Koeffizienten der Funktionen $Q_n(\varrho_1)$ auf beiden Seiten einander gleich, so gelangt man zu folgenden Gleichungen:

$$(8.) \qquad \begin{aligned}
\frac{\partial U_0}{\partial y} &= 0, \\
\frac{\partial U_1}{\partial y} &= 0, \\
\frac{\partial U_2}{\partial y} &= -\left(\frac{\sin\vartheta\cos\varphi\sqrt{\varrho^2-1}}{a}\right)\left[\left(\frac{3}{1\cdot 2}\right)\mathfrak{U}_1\right], \\
\frac{\partial U_3}{\partial y} &= -\left(\frac{\sin\vartheta\cos\varphi\sqrt{\varrho^2-1}}{a}\right)\left[\left(\frac{5}{2\cdot 3}\right)\mathfrak{U}_2\right], \\
\frac{\partial U_4}{\partial y} &= -\left(\frac{\sin\vartheta\cos\varphi\sqrt{\varrho^2-1}}{a}\right)\left[\left(\frac{7}{3\cdot 4}\right)\mathfrak{U}_3 + \left(\frac{3}{1\cdot 2}\right)\mathfrak{U}_1\right]. \\
\frac{\partial U_5}{\partial y} &= -\left(\frac{\sin\vartheta\cos\varphi\sqrt{\varrho^2-1}}{a}\right)\left[\left(\frac{9}{4\cdot 5}\right)\mathfrak{U}_4 + \left(\frac{5}{2\cdot 3}\right)\mathfrak{U}_2\right], \\
&\text{etc. etc. etc.}
\end{aligned}$$

Folglich ist für jedwedes $n > 1$:

$$(9.)\quad \frac{\partial U_n}{\partial y} = -\left(\frac{\sin\vartheta\cos\varphi\sqrt{\varrho^2-1}}{a}\right)\Big[\left(\frac{2n-1}{(n-1)\,n}\right)\mathfrak{U}_{n-1} + \left(\frac{2n-5}{(n-3)\,(n-2)}\right)\mathfrak{U}_{n-3}+\cdots\Big] \qquad (n>1).$$

Vergleichung der beiden Resultate. — Aus (3.) und (9.) folgt sofort:

$$(10.)\quad \begin{cases} \dfrac{\varrho\,P_n'(\varrho)\,P_n(\mu)-\mu\,P_n'(\mu)\,P_n(\varrho)}{\varrho^2-\mu^2} = -\Big[\left(\dfrac{2n-1}{(n-1)\,n}\right)\mathfrak{U}_{n-1} \\ \qquad +\left(\dfrac{2n-5}{(n-3)\,(n-2)}\right)\mathfrak{U}_{n-3}+\left(\dfrac{2n-9}{(n-5)\,(n-4)}\right)\mathfrak{U}_{n-5}+\cdots\Big], \end{cases}$$

wo $\mathfrak{U}_n = P_n'(\varrho)\,P_n'(\mu)$ ist. *Diese Entwicklung* (10.) *repräsentiert die zu* (C.) *parallel stehende Formel.*

§ 5.

Die zu (D.) *parallel stehende Formel.*

Wir adoptieren jetzt die Vorstellungen des § 3; so daß wir also z. B. folgende Formel vor uns haben [§ 3 (6.)]:

$$(1.)\quad \frac{1}{\sqrt{-1+(\varrho^2+\varrho_1^2+\mu^2)-2\varrho\,\varrho_1\,\mu}} = \sum_0^\infty\left(\frac{2n+1}{2}\right)V_n\,P_n(\varrho_1),\ (\varrho_1<\varrho),$$

wo V_n die Bedeutung hat:

$$(2.)\quad V_n = Q_n(\varrho)\,P_n(\mu).$$

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die partielle Ableitung $\frac{\partial V_n}{\partial y}$ zu berechnen. Zur Absolvierung dieser Aufgabe bieten sich zwei verschiedene Wege dar:

Erstens: Der Weg direkter Rechnung. — Nach (2.) ist:

$$\frac{\partial V_n}{\partial y} = P_n(\mu)\, Q_n'(\varrho)\frac{\partial \varrho}{\partial y} + Q_n(\varrho)\, P_n'(\mu)\frac{\partial \mu}{\partial y},$$

oder, falls man die Ableitungen $\frac{\partial \varrho}{\partial y}$ und $\frac{\partial \mu}{\partial y}$ [auf Grund der Formeln § 2 (1.)] wirklich berechnet:

$$(3.) \qquad \frac{\partial V_n}{\partial y} = \left(\frac{\sin\vartheta\cos\varphi\sqrt{\varrho^2-1}}{a(\varrho^2-\mu^2)}\right)[\varrho\, Q_n'(\varrho)\, P_n(\mu) - \mu\, P_n'(\mu)\, Q_n(\varrho)].$$

Zweitens: Der von der Reihenentwicklung (1.) *ausgehende Weg.* — Aus (1.) folgt durch partielle Ableitung nach y:

$$(4.) \qquad -\left(\frac{1}{R}\right)^3\left(\frac{\sin\vartheta\cos\varphi\sqrt{\varrho^2-1}}{a}\right) = \sum_0^\infty\left(\frac{2n+1}{2}\right)\frac{\partial V_n}{\partial y}P_n(\varrho_1),$$

wo R die in (1.) stehende Radix vorstellt.

Man denke sich nun die *F. Neumann*sche Formel*) für $\frac{a}{E}$ ganz allgemein hingeschrieben, nur unter der Voraussetzung, daß $\varrho_1 < \varrho$ sein soll. Diese Formel differentiiere man nach φ, dividiere sodann durch $\sqrt{1-\mu_1^2}$ und mache endlich $\mu_1 = 1$. So gelangt man zu folgender Formel:

$$(5.) \qquad -\left(\frac{1}{R}\right)^3 = \sum_1^\infty\left(\frac{2n+1}{2n(n+1)}\right)\mathfrak{B}_n P_n'(\varrho_1),$$

wo

$$(6.) \qquad \mathfrak{B}_n = Q_n'(\varrho)\, P_n'(\mu)$$

ist, während R dieselbe Bedeutung hat wie in (4.).

*) Vgl. die vorige Note.

Nunmehr folgt aus (4.) und (5.) durch Elimination von R:

$$(7.)\quad \sum_0^\infty \left(\frac{2n+1}{2}\right) \frac{\partial V_n}{\partial y} P_n(\varrho_1) = \left(\frac{\sin\vartheta\cos\varphi\sqrt{\varrho^2-1}}{a}\right) \sum_1^\infty \left(\frac{2n+1}{2n(n+1)}\right) \mathfrak{V}_n P_n'(\varrho_1).$$

Substituiert man aber hier für $P_n'(\varrho_1)$ die in (V.) § 1 angegebene Entwicklung:

$$P_n'(\varrho_1) = (2n-1) P_{n-1}(\varrho_1) + (2n-5) P_{n-3}(\varrho_1) + \cdots,$$

und setzt man in der so entstehenden Formel die Koeffizienten der Funktionen $P_n(\varrho_1)$ auf beiden Seiten einander gleich, so gelangt man für jedwedes n zu folgender Gleichung:

$$(8.)\quad \frac{\partial V_n}{\partial y} =$$

$$\left(\frac{\sin\vartheta\,\cos\varphi\sqrt{\varrho^2-1}}{a}\right)\left[\left(\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right)\mathfrak{V}_{n+1} + \left(\frac{2n+7}{(n+3)(n+4)}\right)\mathfrak{V}_{n+3} + \cdots\right].$$

Vergleichung der beiden Resultate. — Aus (3.) und (8.) ergibt sich sofort:

$$(9.)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\varrho\, Q_n'(\varrho) P_n(\mu) - \mu\, P_n'(\mu) Q_n(\varrho)}{\varrho^2-\mu^2} \\ = \left(\dfrac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right)\mathfrak{V}_{n+1} + \left(\dfrac{2n+7}{(n+3)(n+4)}\right)\mathfrak{V}_{n+3} + \cdots, \end{array}\right.$$

wo $\mathfrak{V}_n = Q_n'(\varrho) P_n'(\mu)$ ist. *Diese Entwicklung* (9.) *repräsentiert die zu* (D.) *parallel stehende Formel.*

Für den Spezialfall $\mu = 0$ geht (9.) über in:

$$(10.)\quad \frac{Q_n'(\varrho) P_n(0)}{\varrho} =$$

$$\left(\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right) Q_{n+1}'(\varrho) P_{n+1}'(0) + \left(\frac{2n+7}{(n+3)(n+4)}\right) Q_{n+3}'(\varrho) P_{n+3}'(0) + \cdots.$$

Und diese Formel (10.) reduziert sich für ein *ungerades* n auf $0=0$.

Andererseits aber wird sie, was hier nicht weiter ausgeführt werden soll, für ein *gerades* n folgende Gestalt annehmen:

$$(11.)\quad \frac{Q_n'(\varrho)}{\varrho} = \left(\frac{2n+3}{n+2}\right) Q_{n+1}'(\varrho) - \left(\frac{2n+7}{n+4}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right) Q_{n+3}'(\varrho) + \left(\frac{2n+11}{n+6}\right)\left(\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+4)}\right) Q_{n+5}'(\varrho) + \cdots .$$

Dies ist eine schon von *F. Neumann* gegebene Entwicklung*). Und diese Entwicklung präsentiert sich uns hier als ein spezieller Fall der viel allgemeineren Formel (9.).

*) Vgl. *F. Neumanns* Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen, S. 67 (17.).

Lower limit for the number of sets of solutions of $x^e + y^e + z^e \equiv 0 \pmod{p}$.

By Mr. *L. E. Dickson* at Chicago.

1. From the results established in the present paper it follows that, when e and p are odd primes, the congruence

$$x^e + y^e + z^e \equiv 0 \pmod{p} \tag{1.}$$

has integral solutions x, y, z, each prime to p, for every $p \geq E$, where

$$E = (e-1)^2 (e-2)^2 + 6e - 2. \tag{2.}$$

When e is prime to $p-1$, every integer is a residue of an eth power modulo p, so that the congruence (1.) has obvious solutions. Henceforth we assume that e and p are odd primes such that e divides $p-1$. We set $p-1 = ef$.

Let g be a primitive root of p. Then (1.) has solutions x, y, z, prime to p, if and only if the congruence

$$1 + g^{et} \equiv g^{e\tau} \pmod{p} \tag{3.}$$

has integral solutions t, τ. The more general congruence

$$1 + g^{et+k} \equiv g^{e\tau+h} \pmod{p} \tag{4.}$$

is employed in the theory of the division of the circle (Kreisteilung). For given integers k and h of the series $0, 1, \dots e-1$, let (k, h) denote the number of integers t of the series $0, 1, \dots f-1$ for which (4.) may be satisfied by choice of an integer τ of the latter series.

Our aim is to find a lower limit for the number (0,0) of sets of solutions t, τ (each $< f$) of (2.), and finally (§ 5) a lower limit for the number of sets of solutions prime to p of (1.).

2. Let r be a primitive p^{th} root of unity. The e periods are

$$\eta_k = \sum_{t=0}^{f-1} r^{g^{et+k}}. \qquad (k=0, 1, \dots e-1) \tag{5.}$$

Let ω be a primitive $(p-1)^{\text{th}}$ root of unity. *Jacobi*'s function is

$$[\omega^h, r] = \sum_{\lambda=0}^{p-2} \omega^{h\lambda} r^{g^\lambda}, \tag{6.}$$

the notation [ ] being used here to avoid confusion with the above symbol ( ). Let $\omega^f = \beta$, so that β is a primitive e^{th} root of unity. Note that, for $h = mf$, (6.) be given the form

$$[\beta^m, r] = \sum_{\lambda=0}^{p-2} \beta^{m\lambda} r^{g^\lambda} = \sum_{k=0}^{e-1} \beta^{km} \eta_k, \tag{7.}$$

as follows from (5.) upon setting $\lambda = e + k$. We here employ only the special *Jacobi*-functions (7.), which are linear functions of the periods. For $m+n$ not divisible by e, we have the relation*)

$$\frac{[\beta^m, r]\ [\beta^n, r]}{[\beta^{m+n}, r]} = \sum_{\mu=1}^{p-2} \beta^{m \text{ ind } \mu - (m+n) \text{ ind } (1+\mu)}, \tag{8.}$$

the indices relating to the prime modulus p. The second member is in-

*) From (28.), p. 86, *Bachmann*, Kreisteilung, with $h = mf$, $k = nf$.

dependent of r. Taking $m=1$, we set

$$(9.) \qquad R_n(\beta) = \sum_{\mu=1}^{p-2} \beta^{\operatorname{ind}\mu - (1+n)\operatorname{ind}(1+\mu)}. \qquad (n=1,\dots e-2)$$

For $m+n$ divisible by e, we have*), instead of (8.),

$$(10.) \qquad [\beta^m, r]\,[\beta^{-m}, r] = p.$$

Hence we have the relation

$$(11.) \qquad R_n(\beta)\cdot R_n(\beta^{-1}) = p.$$

3. Let K_n denote the sum of the terms in (9.) whose exponents are multiples of e. For the moment, set

$$1+n \equiv \frac{1}{\varrho} \pmod e,\ \mu = g^{d+ke},\ 1+\mu = g^l. \qquad (0 \leq d < e,\ 0 \leq k \leq f-1)$$

Then the exponent in (9.) is a multiple of e if and only if $l \equiv \varrho d \pmod e$. Hence there are as many exponents multiples of e as there are pairs of integers d, k for which

$$1 + g^{d+ke} \equiv g^{d\varrho} \pmod p.$$

It follows from the definition in § 1 that

$$(12.) \qquad K_n = \sum_{d=0}^{e-1} (d, d\varrho). \qquad \varrho(1+n) \equiv 0 \pmod e$$

In (9.), n may take, the values $1, \dots e-2$. Then $\varrho \equiv (1+n)^{-1}$ takes the values $2, \dots e-1 \pmod e$ in some order. Hence

*) *Bachmann*, p. 87, (29), with $h = mf$. Note that f is even for e odd.

$$\sum_{n=1}^{e-2} K_n = \sum_{d=0}^{e-1} \sum_{\varrho=2}^{e-1} (d, d\varrho) = (e-2)(0,0) + \sum_{d=1}^{e-1} L_d,$$

$$L_d = \sum_{\varrho=2}^{e-1} (d, d\varrho) = \sum_{j \neq d}^{j=1\ldots,\, e-1} (d, j),$$

since, for $d \not\equiv 0$, $2d \ldots$, $(e-1)d$ are congruent, modulo e, to $1, \ldots d-1$, $d+1, \ldots, e-1$, in some order. Now, for e odd, f even,

$$\sum_{j=0}^{e-1} (0, j) = f-1, \quad \sum_{j=0}^{e-1} (d, j) = f. \qquad (d = 1 \ldots, e-1) \tag{13.}$$

Also, $(d, d) = (0, e-d)$. Hence

$$\sum_{d=1}^{e-1} L_d = \sum_{d=1}^{e-1} \{f - (d, 0) - (0, e-d)\} = (e-1)f - 2 \sum_{j=1}^{e-1} (0, j).$$

Applying also (13.), we obtain

$$\sum_{n=1}^{e-2} K_n = e\,(0, 0) + (e-3)f + 2. \tag{14.}$$

4. In (9.) we reduce the exponents by means of $\beta^e = 1$ and set

$$R_n(\beta) = K_n + \sum_{k=1}^{e-1} C_{nk} \beta^k. \tag{15.}$$

Since there are $p-2$ terms in (9.), we have

$$K_n + \sum_{k=1}^{e-1} C_{nk} = p - 2. \tag{16.}$$

From (15.) we subtract

$$0 = K_n (1 + \sum_{k=1}^{e-1} \beta^k).$$

Let $a_{nk} = C_{nk} - K_n$. Then (15.) and (16.) give

$$(17.) \qquad R_n(\beta) = \sum_{k=1}^{e-1} a_{nk}\beta^k, \quad \sum_{k=1}^{e-1} a_{nk} = p - 2 - eK_n.$$

From (11.) and (17.), we have

$$(18.) \qquad p = \sum_{k=1}^{e-1} a_{nk}\beta^k \cdot \sum_{l=1}^{e-1} a_{nl}\beta^{-l} = \sum_{k=1}^{e-1} a_{nk}^2 + \sum_{s=1}^{\frac{1}{2}(e-1)} A_{ns}(\beta^s + \beta^{-s}),$$

where obviously

$$(19.) \qquad \sum_{s=1}^{\frac{1}{2}(e-1)} A_{ns} = \Sigma a_{nk}a_{nl}. \qquad (k, l = 1, \ldots e-1;\ k < l)$$

Since $\sum_{k=0}^{e-1} \beta^k = 0$ is irreducible in the domain of rational members, equation (18.) requires that

$$(20.) \qquad \sum_{k=1}^{e-1} a_{nk}^2 - p = A_{ns}. \qquad \left(s = 1, \ldots, \tfrac{1}{2}(e-1)\right)$$

Hence by (19.)

$$(21.) \qquad p = \sum_{k=1}^{e-1} a_{nk}^2 - \frac{1}{\frac{1}{2}(e-1)} \Sigma a_{nk}a_{nl}. \qquad (k, l = 1, \ldots e-1;\ k < l)$$

The discriminant of the quadratic form

$$mp - (\Sigma a_{nk})^2,$$

with the value (21.) of p inserted, is seen to vanish only for $m = 0$ or $m = (e-1)^2$. For the latter value, we have

$$(22.) \qquad (e-1)^2 p - \Big(\sum_{k=1}^{e-1} a_{nk}\Big)^2 = eM_n, \ M_n = (e-2)\sum_{k=1}^{e-1} a_{nk}^2 - 2\Sigma a_{nk}a_{nl}.$$

Since M_n may be given the form

$$M_n = \Sigma(a_{nk} - a_{nl})^2 \qquad (k, l, \ldots e-1;\ k<l) \tag{23.}$$

we have $M_n > 0$; indeed, if the $a's$ were all equal, p would reduce to a_1^2, and not be prime. Hence, by (22.),

$$(e-1)\sqrt{p} > \sum_{k=1}^{e-1} a_{nk}. \tag{24.}$$

Thus, by (17.), we have

$$(e-1)\sqrt{p} > p - 2 - e K_n. \tag{25.}$$

This result, like all others in §§ 3, 4 holds true for each $n = 1, \ldots e-2$. Hence, applying (14.), we get

$$(e-2)(e-1)\sqrt{p} > (e-2)(p-2) - e^2(0,0) - (e-3)ef - 2e.$$

Since $ef = p-1$, we get

$$e^2(0,0) > p + 1 - 3e - (e-2)(e-1)\sqrt{p}. \tag{26.}$$

5. By (26.), a sufficient condition for $(0,0) > 0$ is

$$p + 1 - 3e \geqq (e-2)(e-1)\sqrt{p}.$$

Squaring this and employing the abbreviation (2.), we get

$$p^2 - pE + (3e-1)^2 \geqq 0. \tag{27.}$$

This condition is satisfied*) if $p \geqq E$, and hence if

$$ef+1=p>E-1,\ ef>e^4-6e^3+13e^2-6e.$$

Theorem. *If* e *and* $p=ef+1$ *are odd primes such that*

$$f>e^3-6e^2+13e-6, \tag{28.}$$

congruence (1.) *has a set of solutions prime to* p. *Formula* (26.) *gives a lower limit for the number* $e^2(0,0)$ *of sets of solutions prime to* p *of*

$$1+u^e\equiv v^e \pmod p. \tag{29.}$$

For the number $N=(p-1)\,e^2(0,0)$ *of sets of solutions prime to* p *of* (1.), *we have*

$$N>(p-1)\{p+1-3e-(e-1)(e-2)\sqrt{p}\}. \tag{30.}$$

6. When f is a multiple of 3, there exists an integral root ε of

$$(\varepsilon^{3e}-1)/(\varepsilon^e-1)\equiv 0 \pmod{p=ef+1}.$$

Then (1.) has the set of solutions $x\equiv 1, y\equiv\varepsilon, z\equiv\varepsilon^2$. Hence in discussing the limit $p<E$ obtained in § 5 as a necessary condition for $(0,0)=0$, we need only test the primes $p=ef+1$ in which f is not divisible by 3.

For $e=3$, $E=20$, and the remaining primes are 7, 13. For each of these, $(0,0)=0$, so that the limit may be said to be exact.

---

*) We may take $p \geqq P$, where P is the greater root of the equality (27.). But, for $e \geqq 7$, $E-P<1$, and there is no reduction for the integer p. For $e=5$, $P=170\cdot 85$ and we may replace the limit $E=172$ by 171, a trivial reduction since 171 is not prime. For $e=3$, we may replace the limit $E=20$ by $P=16$; the only intermediate prime of the form $3f+1$ is 19, which falls under the case in § 6.

For $e=5$, $E=172$, and the remaining primes are 11, 41, 71, 101, 131. For the first four, $(0,0)=0$; for 131, $(0,0)=6$.

For $e=7$, $E=940$, there remain 14 primes. Of these the first three (29, 71, 113) and the eighth (491) alone have $(0,0)=0$.

7. The method may be modified to apply to composite values of e. For $e=4$, let

$$p=4f+1=A^2+4B^2.$$

For f even, set $(0,0)=\alpha$, $(1,2)=(1,3)=(2,3)=\varepsilon$. Then*)

$$\alpha=3\varepsilon-\tfrac{1}{2}f-1,\ 8\varepsilon-2f-1=\pm A.$$

Hence $\alpha=0$ requires that

$$\mp 3A=2f-5,\ p>A^2,\ 0>f^2-14f+4,\ f<14,\ p=17.$$

For f odd, we have

$$\pm A=2f-3-8(0,0).$$

Then $(0,0)=0$ requires that

$$p>A^2,\ 0>f^2-4f+2,\ f\leq 3,\ p=5 \text{ or } 13.$$

Hence $x^4+y^4\equiv z^4 \pmod p$ *has solutions prime to* p *for every prime* $p=4f+1$ *exceeding* 17.

*) *Carey*, Quarterly Journ. Math. vol. 26 (1893), p. 349—352.

Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem.

Von Herrn *P. Bohl* in Riga.

In der Theorie der säkularen Störungen werden folgende Näherungsgleichungen abgeleitet:

$$(\alpha)\quad \begin{cases} e \sin \omega = \\ N_0 \sin(g_0 t + \beta_0) + N_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + \cdots + N_{n-1} \sin(g_{n-1} t + \beta_{n-1}), \\ e \cos \omega = \\ N_0 \cos(g_0 t + \beta_0) + N_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + \cdots + N_{n-1} \cos(g_{n-1} t + \beta_{n-1}), \end{cases}$$

$$(\beta)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} \Phi \cdot \sin \Theta = \\ M_0 \sin(h_0 t + \gamma_0) + M_1 \sin(h_1 t + \gamma_1) + \cdots + M_{n-1} \sin(h_{n-1} t + \gamma_{n-1}), \\ \operatorname{tg} \Phi \cdot \cos \Theta = \\ M_0 \cos(h_0 t + \gamma_0) + M_1 \cos(h_1 t + \gamma_1) + \cdots + M_{n-1} \cos(h_{n-1} t + \gamma_{n-1}). \end{cases}$$

Hierbei bezeichnen e, ω, Φ, Θ die Exzentrizität, die Perihellänge, die Neigung und die Länge des aufsteigenden Knotens. Ferner sind die $N, g, \beta, M, h, \gamma$-Größen Konstanten und t drückt die Zeit aus.

Schon *Lagrange* und *Laplace* haben sich mit den Folgerungen beschäftigt, welche sich aus den Gleichungen (α) und (β) für die Bewegung der Apsiden und Knoten ergeben. Es handelt sich dabei auch um die Entscheidung der Frage, ob ω und Θ eine „mittlere Bewegung“ besitzen, d. h.

ob diese Größen in der Form $ct + \chi$ darstellbar sind, wobei c eine Konstante*) und χ eine für unbegrenzt wachsendes t zwischen endlichen Grenzen bleibende Funktion bedeutet**).

Diese Frage ist von *Lagrange* für folgende zwei Fälle in bejahendem Sinn entschieden worden:

1. Die rechten Seiten der Gleichungen (α) oder (β) enthalten nicht mehr als zwei Glieder.
2. Die rechten Seiten enthalten eine beliebige Anzahl von Gliedern, aber einer der N- (resp. M-) Koeffizienten ist dem absoluten Betrage nach größer als die Summe der Absolutwerte der übrigen***).

In betreff der übrigen Fälle bemerkt *Lagrange*: „Hors de ces deux cas, il est fort difficile et peut-être même impossible de prononcer, en général, sur la nature de l'angle φ."†)

Der eben gekennzeichnete Standpunkt von *Lagrange* wird auch in einer Reihe von Darstellungen der theoretischen Astronomie eingenommen. Dies geschieht z. B. in dem Traité de mécanique céleste von *Tisserand*††). Es können jedoch auch Meinungsäußerungen angeführt werden, in welchen die Existenz einer mittleren Bewegung verneint wird, sofern man von den oben genannten zwei Fällen absieht. Eine solche — in derartiger Allgemeinheit offenbar unrichtige — Ansicht ist z. B. von *Stockwell* in einer Abhandlung verlautbart worden, welche ihrer numerischen Resultate wegen hoch geschätzt wird†††). Andererseits sind in letzter Zeit Untersuchungen

---

*) Sie möge im folgenden „Konstante der mittleren Bewegung" heißen.

**) Geschieht die Definition der mittleren Bewegung in der Weise, daß das Begrenztsein von χ für *alle* t gefordert wird, so ändert dies nichts wesentliches an den von mir gefundenen Resultaten. Immerhin könnte man die Frage stellen, inwieweit sich die beiden erwähnten Definitionen decken. Sind die rechten Seiten von (α) bezw. (β) — welche nicht für alle t gleichzeitig verschwinden sollen — dreigliedrig, so sind die Definitionen äquivalent. Das Gleiche gilt, wenn e resp. tg Φ nicht für unendlich viele verschiedene t verschwinden. Den Fall, in welchem die letzte Bedingung nicht erfüllt ist und $n > 3$ gilt, habe ich nicht untersucht.

***) Der Fall 2. ist bei der Mehrzahl der Planeten, jedoch nicht bei allen verwirklicht.

†) Dieser Winkel spielt eine analoge Rolle, wie ω oder Θ in den Gleichungen (α) oder (β). S. Oeuvres de *Lagrange* Tome V, Paris 1870, S. 285.

††) *Tisserand*, Traité de mécanique céleste, Tome 1, Chapitre XXVI, Paris 1889.

†††) *Stockwell*, Memoir on the secular variations of the elements of the orbits of the eight principal planets. Smithsonian contributions to knowledge 1872.

erschienen, welche den Nachweis erbringen sollen, daß eine mittlere Bewegung *immer* existiert. Auf diese Arbeiten muß ich etwas näher eingehen.

In seinen letzten Lebensjahren hat *Gyldén* Untersuchungen über das in Frage stehende Problem angestellt. Zunächst behandelt er dasselbe im ersten und vierten Kapitel seines „Traité analytique des orbites absolues“*). Es wird jedoch an dieser Stelle die Möglichkeit außer acht gelassen, daß die rechten Seiten von (α) oder (β) nach jedem Zeitmoment noch gleichzeitig absolut beliebig kleine Werte annehmen. *Gyldén* operiert vielmehr mit einem vermeintlichen positiven kleinsten Wert der Quadratsumme der rechten Seiten. In einem Artikel**), der in den Schriften der Petersburger Akademie erschienen ist, weist *Gyldén* selbst auf die genannte Unterlassung hin. Ob er die Behauptung, daß eine mittlere Bewegung stets existiert, aufrecht erhält, geht aus dem genannten Artikel nicht mit völliger Bestimmtheit hervor. In dieser Beziehung läßt jedoch die nächste Arbeit *Gyldéns* über den besprochenen Gegenstand keinen Zweifel übrig. Diese umfangreiche Abhandlung ist speziell unserer Frage gewidmet und führt den Titel „Sur la transformation des agrégats périodiques“***). In derselben beschränkt sich *Gyldén* — wie bereits in dem unmittelbar vorher genannten Artikel — in der Hauptsache auf den Fall, wo die Ausdrücke der rechten Seiten von (α) oder (β) drei Glieder enthalten†). Um die Meinung *Gyldéns* klar zustellen, führe ich zunächst folgenden Passus††) aus der eben genannten Abhandlung an: „. . . . le moyen mouvement reste une quantité réelle et finie dont il sera, évidemment, possible de trouver la valeur, même si le chemin qui y conduit paraît d'abord obscur et hérissé de difficultés.“ Ich verweise ferner auf S. 5 unten, S. 54 oben, S. 77 oben. Einen hinreichenden Beweis für die Richtigkeit der *Gyldén*schen Meinung wird man aber in der zuletzt genannten Abhandlung kaum finden können. Bei der Durchsicht derselben gewinnt man vielmehr meist den

*) *Gyldén*, Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales. Tome I, Stockholm, 1893.

**) *Gyldén*, Zur Transformation der periodischen Aggregate. Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg 1894 V^{e} série I, 4.

***) Sie bildet das 4. Heft des 5. Bandes der „Astronomiska iakttagelser och undersökningar anstälda på Stockholms observatorium“ 1895.

†) Auf diesen Fall bezieht sich auch der wesentliche Teil meiner Arbeit.

††) Derselbe findet sich S. 4 oben.

Eindruck, als ob *Gyldén* die Existenz einer mittleren Bewegung voraussetzt und sich mit der Bestimmung des Koeffizienten beschäftigt, der in dem t proportionalen Glied auftritt. Über einen bemerkenswerten Teil der *Gyldén*schen Arbeit, der die Seiten 71—77 einnimmt, werden wir nachher noch einiges zu sagen haben.

Ein zweiter Versuch, die Existenz einer mittleren Bewegung zu beweisen, ist von *Cavallin* in der Abhandlung*) „Contributions to the theory of the secular perturbations of the planets" gemacht worden. Der Verfasser nimmt zunächst als Koeffizienten von t unter den Zeichen cos und sin auf den rechten Seiten von (α) oder (β) rationale Zahlen an. In diesem Fall existiert in der Tat offenbar eine mittlere Bewegung. Daß dies auch in allen anderen Fällen gilt, schließt der Verfasser aus einer Betrachtung, welche nur wenige Zeilen auf S. 9 seiner Arbeit einnimmt. Ich kann jedoch dieser Betrachtung keine Beweiskraft zusprechen.

Was die Berücksichtigung betrifft, die die genannten Untersuchungen von *Gyldén* und *Cavallin* in den neuesten Darstellungen der theoretischen Astronomie erfahren, so vermag ich darüber nur folgendes zu sagen. In dem Artikel „Mechanik des Himmels" aus dem zweiten Bande des von *Valentiner* herausgegebenen Handwörterbuchs der Astronomie wird auf S. 395 das *Gyldén*sche Resultat akzeptiert. Im ersten Bande der „Mechanik des Himmels" von *Charlier* werden die *Cavallin*schen Untersuchungen für den oben genannten Rationalitätsfall besprochen. Die Frage nach der Existenz einer mittleren Bewegung bezeichnet *Charlier* als offen (S. 390), er hält jedoch die Existenz einer mittleren Bewegung für wahrscheinlich (S. 369). Die oben genannten *Gyldén*schen Untersuchungen werden nicht erwähnt.

Im vorhergehenden habe ich bereits meine Meinung dahin geäußert, daß die von *Gyldén* und *Cavallin* vertretene Ansicht in ihren Schriften keine genügende Begründung erfahren habe. Im folgenden glaube ich nachweisen zu können, daß die genannte Ansicht auch inhaltlich eine irrtümliche ist. Ehe ich mit der Darstellung meiner eigenen Untersuchungen beginne, möchte ich eine Übersicht über die von mir gefundenen Ergebnisse vorausschicken.

---

*) Meddelanden från Lunds astronomiska observatorium No. 19. Die genannte Arbeit ist auch in den Publikationen der Schwedischen Akademie gedruckt. Die oben genannten Untersuchungen *Gyldéns* werden in der Arbeit von *Cavallin* nicht erwähnt.

Das erste Kapitel enthält vorbereitende Untersuchungen, sowie Betrachtungen allgemeinen Charakters. Es mögen die Ausdrücke

$$(\gamma)\quad \begin{cases} \xi = A_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + A_2 \cos(g_2 t + \beta_2) + \cdots + A_n \cos(g_n t + \beta_n), \\ \eta = A_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + A_2 \sin(g_2 t + \beta_2) + \cdots + A_n \sin(g_n t + \beta_n) \end{cases}$$

vorliegen. In denselben bedeuten $A_1, A_2, \ldots A_n, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n, g_1, g_2, \ldots g_n$ Konstanten, t eine Variable*). Wir nehmen an, daß nicht für alle t $\xi = \eta = 0$ gilt. Sollte für den speziellen Wert $t = t_0$ $\xi = \eta = 0$ sein, so nennen wir t_0 einen Nullwert. In einer gewissen Umgebung von t_0 gibt es offenbar keinen neuen Nullwert. Durch die Gleichungen

$$(\delta)\qquad u \cdot \cos\varphi = \xi, \qquad u \cdot \sin\varphi = \eta$$

werden jedem t-Werte Größen u, φ zugeordnet. Ist t ein Nullwert, so ist $u = 0$ und φ beliebig. Ist t kein Nullwert, so erhalten wir ein System von φ-Werten, wobei die Elemente dieses Systems aus einem Element durch Hinzufügen eines beliebigen Vielfachen von π entspringen. Es möge nun ein zusammenhängendes t-Gebiet T vorliegen, welches jedoch nicht aus bloß einem t-Wert besteht. Man kann dann für dieses Gebiet φ als stetige Funktion von t so bestimmen, daß die Gleichungen (δ) bei geeigneter Wahl von u erfüllt werden. Neue Funktionen der geforderten Art erhält man durch Hinzufügen eines beliebigen Vielfachen von π, und zwar ergeben sich alle Funktionen mit den vorgeschriebenen Eigenschaften in dieser Weise. Die genannte additive Konstante spielt im folgenden keine Rolle. Es möge nun die weitere Bedingung hinzugefügt werden, daß $u \geqq 0$ ist. Für einen Nullwert haben wir wieder $u = 0$, φ beliebig. Ist t kein Nullwert, so erhalten wir ein System von φ-Werten, wobei die Elemente dieses Systems aus einem Element durch Hinzufügen eines beliebigen Vielfachen von 2π entspringen. Ist ein t-Gebiet T von derselben Art wie im vorhergehenden gegeben *und enthält dieses Gebiet keinen Nullwert*, so kann man für dieses Gebiet φ als stetige Funktion von t so bestimmen, daß die

*) Ich benutze in meiner Arbeit nur reelle Größen.

Gleichungen (δ) erfüllt werden und $u \gtrless 0$ gilt. Dies ist jedoch nicht immer möglich, wenn T einen Nullwert enthält, und um die Funktion φ in einer für das folgende genügenden Weise zu charakterisieren, brauchen wir jetzt neue Festsetzungen. Das Gesagte veranlaßt mich, von der Bedingung $u \gtrless 0$ abzusehen. Für die Behandlung unseres Problems hat dies zur Folge, daß wir nicht die Bewegung des Perihels oder aufsteigenden Knotens, sondern die Bewegung der Apsidenlinie oder Knotenlinie betrachten. Es möge noch darauf hingewiesen werden, daß die Differenz zwischen den Resultaten *Gyldéns* und *Cavallins* einerseits und den meinigen andererseits keineswegs auf die eben erwähnte Festsetzung zurückzuführen ist. Dies zeigt schon der Umstand, daß diese Differenz gerade in einem Falle zutage tritt, wo für genügend große t keine Nullstellen mehr vorkommen*). Die eben besprochenen Betrachtungen des ersten Kapitels sind natürlich völlig elementar und anspruchslos, sie waren jedoch kaum zu vermeiden.

Ferner erwähne ich aus dem Inhalt des ersten Kapitels die Feststellung der Tatsache, daß eine mittlere Bewegung existiert, wenn einer der A-Koeffizienten der Gleichungen (γ) dem absoluten Betrage nach der Summe der Absolutwerte der übrigen A-Koeffizienten gleich ist. Der Beweis dieser Behauptung ist übrigens sehr einfach.

Endlich berühre ich noch im ersten Kapitel die Frage nach der oberen und unteren Grenze von $|u|$, wobei diese Ausdrücke im streng mathematischen Sinne genommen werden sollen. Schon *Laplace* gibt an, daß stets

$$|u| \leqq |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

gelten muß. Ist einer der A-Koeffizienten, etwa A_μ dem absoluten Betrage nach größer als die Summe der Absolutwerte der übrigen**), so gilt ferner immer

$$|u| \gtrless 2|A_\mu| - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} |A_\nu|.$$

Gibt es keinen derartigen Koeffizienten A_μ, so schreiben wir die selbstverständliche Ungleichung $|u| \gtrless 0$ an. *Stockwell* nimmt in seiner schon vorher

*) Ist die gleich zu erwähnende Größe ϱ keine Rationalzahl, so haben die Ausdrücke (ζ) für genügend große t keinen Nullwert.

**) Wir nehmen $n > 1$ an.

angeführten Schrift die eben genannten Werte ohne weiteres als Grenzen an, was offenbar nicht vollständig richtig ist. Andererseits finden sich auch mehr zurückhaltende Äußerungen*) über den in Frage stehenden Punkt. Wie ich in § 6 gezeigt habe, besteht eine *hinreichende* Bedingung dafür, daß die genannten Werte die gesuchten Grenzen darstellen, in folgendem:

Es gibt keine Beziehungen der Form

$$(\varepsilon) \qquad m_2(g_2-g_1)+m_3(g_3-g_1)+\cdots+m_n(g_n-g_1)=0,$$

wobei $m_2, m_3, \ldots m_n$ ganze Zahlen bedeuten, welche nicht gleichzeitig verschwinden. Ist diese hinreichende Bedingung erfüllt, so kann jeder positiven Zahl p eine solche positive Zahl q zugeordnet werden, daß in jedem t-Intervall von der Länge q die obere und untere Grenze von $|u|$ mit einer Abweichung, die kleiner ist als p, angenommen werden.

Im zweiten Kapitel werden einige Hilfssätze abgeleitet, welche für das folgende von großer Bedeutung sind. Um den Gegenstand dieser Sätze zu bezeichnen, denken wir uns einen Kreis, dessen Umfang gleich der Längeneinheit ist. Auf der Peripherie tragen wir eine Strecke L ab, deren Länge kleiner als der Kreisumfang ist. Endlich stellen wir uns einen Punkt vor, der sich auf der Peripherie sprungweise in einer festen Richtung fortbewegt, indem er von einem bestimmten Punkte ausgeht und stets Schritte von derselben Größe macht. Hat der springende Punkt seit dem Beginn der Bewegung m-mal die Peripherie berührt, so gebe $\psi(m)$ an, wievielmal der Punkt die Strecke L berührt hat**). Auf diese Funktion $\psi(m)$ beziehen sich die genannten Hilfssätze.

Nach den Vorbereitungen im ersten und zweiten Kapitel gehen wir im dritten Kapitel zu unserem eigentlichen Gegenstand über. Es sei $n=3$, so daß die Gleichungen (γ) folgende Gestalt annehmen

$$(\zeta) \quad \begin{cases} \xi = A_1 \cos(g_1 t+\beta_1)+A_2\cos(g_2 t+\beta_2)+A_3\cos(g_3 t+\beta_3), \\ \eta = A_1 \sin(g_1 t+\beta_1)+A_2\sin(g_2 t+\beta_2)+A_3\sin(g_3 t+\beta_3). \end{cases}$$

---

*) Siehe *Tisserand*, Méc. cél. T. 1. S. 415.

**) Die Endpunkte der Strecke mögen nicht zur Strecke gerechnet werden.

Falls unter den g_1, g_2, g_3 gleiche Werte vorkommen, können die rechten Seiten von (ζ) so transformiert werden, daß sich analog gebildete Ausdrücke ergeben, welche jedoch weniger als drei Glieder enthalten. Wir setzen g_1, g_2, g_3 als unter einander verschieden voraus; es sei etwa $g_1 < g_2 < g_3$. Ist einer der A-Koeffizienten dem absoluten Betrage nach gleich oder größer als die Summe der absoluten Beträge der übrigen, so liegt ein im vorhergehenden bereits erledigter Fall vor. Indem wir diesen Sachverhalt ausschließen, haben wir $2|A_\mu| < |A_1| + |A_2| + |A_3|$ für $\mu = 1, 2, 3$. Hieraus folgt $|A_\mu| > 0$. Ändert man, wenn nötig, β_1 oder β_2 oder β_3 um π, so kann man erreichen, daß die sin und cos auf den rechten Seiten von (ζ) positive Koeffizienten erhalten. Wir wollen demgemäß $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $A_3 > 0$ voraussetzen. Aus dem Gesagten folgt auch, daß die Ausdrücke (ζ) nicht für alle t gleichzeitig verschwinden. Um nun die Hauptergebnisse meiner Arbeit bequem formulieren zu können, führe ich einige Bezeichnungen ein.

Aus drei Strecken von den Längen A_1, A_2, A_3 stellen wir ein Dreieck her und bezeichnen die Größen der A_1, A_2, A_3 gegenüberliegenden Winkel resp. mit w_1, w_2, w_3. Ferner setzen wir

$$(\eta)\quad \begin{cases} \varrho = \dfrac{g_2 - g_1}{g_3 - g_1}, & \zeta = \dfrac{1}{\pi}(w_3 + \varrho w_2), \\ b = \beta_3 - \beta_1 - \dfrac{\beta_2 - \beta_1}{\varrho}, & \omega = \dfrac{1}{2\pi}(\pi - \pi\zeta + (b + \pi)\varrho). \end{cases}$$

Offenbar gilt stets $0 < \varrho < 1$, $0 < \zeta < 1$. In dem Falle, wo ϱ eine Rationalzahl ist, benutzen wir noch folgende Bezeichnungen: Wir setzen $\varrho = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}}$, wobei $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind. Wir bezeichnen ferner mit H die Anzahl der zwischen $\mathfrak{n}\cdot\omega$ und $\mathfrak{n}\cdot(\omega+\zeta)$ liegenden ganzen Zahlen und mit h die Anzahl der mit $\mathfrak{n}\cdot\omega$ oder $\mathfrak{n}\cdot(\omega+\zeta)$ zusammenfallenden ganzen Zahlen.

Es gelten nun folgende Sätze:

I. *Der Ausdruck* $\frac{\varphi(t)}{t}$ *strebt, wenn* t *unbeschränkt wächst, nach einer endlichen Grenze.*

Diese Grenze — wir nennen sie „charakteristische Zahl“ — ist, falls ϱ *eine Irrationalzahl darstellt, gleich**)

$$(\vartheta) \qquad \frac{1}{\pi}(g_1 \cdot w_1 + g_2 \cdot w_2 + g_3 \cdot w_3),$$

falls aber ϱ *eine Rationalzahl darstellt, gleich*

$$(\varkappa) \qquad \frac{g_3 - g_1}{2\pi} \cdot (h + 2H) + g_1.$$

II. *Was die Frage nach der Existenz einer mittleren Bewegung betrifft, so hängt die Antwort auf dieselbe nur von den Größen* ϱ *und* ζ *ab***). *Sind die positiven Größen* ϱ_0 *und* ζ_0 *kleiner als Eins, sonst beliebig gewählt, so gibt es in beliebiger Nähe von* ϱ_0 *solche Zahlen* $\varrho_0 + \varepsilon$, *daß keine mittlere Bewegung existiert, wenn*

$$\zeta = \zeta_0, \varrho = \varrho_0 + \varepsilon$$

ist. In beliebiger Nähe von ϱ_0 *gibt es natürlich auch solche Zahlen* $\varrho_0 + \varepsilon$, *daß eine mittlere Bewegung existiert, wenn*

$$\zeta = \zeta_0, \varrho = \varrho_0 + \varepsilon$$

ist. Dies folgt schon aus dem Umstand, daß ein rationales ϱ *stets die Existenz einer mittleren Bewegung zur Folge hat.*

---

*) Auf den Seiten 71—76 seiner oben erwähnten Schrift: „Sur la transformation etc.“ behandelt *Gyldén* die Bestimmung der Konstanten der von ihm als existierend angesehenen mittleren Bewegung. Die von *Gyldén* gegebenen Vorschriften führen, wie man zeigen kann, zu dem Ausdruck (ϑ). Obgleich diese Betrachtungen meiner Ansicht nach weder die Existenz einer mittleren Bewegung noch einer charakteristischen Zahl streng beweisen, dürften sie andererseits ausreichen, um das behandelte Problem auf dasjenige andere zurückzuführen, dem der II. Abschnitt meiner Arbeit gewidmet ist. Dieses letztere tritt auch bei *Gyldén* in den letzten Zeilen der Seite 74 und den ersten der Seite 75 auf.

Auch die oben erwähnten *Cavallin*schen Betrachtungen reichen meiner Meinung nach nicht aus, um auch nur die Existenz einer charakteristischen Zahl allgemein zu beweisen. Vergleicht man jedoch den von *Cavallin* für den oben charakterisierten Rationalitätsfall gegebenen Wert der charakteristischen Zahl mit dem Ausdruck $(\varkappa)$, so ergeben sich bemerkenswerte Sätze über trinomische Gleichungen. Man kann diese Sätze auch leicht direkt ableiten, wie ich in einer anderen Arbeit „Zur Theorie d. trin. Gleich.“ gezeigt habe. S. Math. Annalen Bd. LXV

**) Daß im besonderen eine mittlere Bewegung stets existiert, wenn ϱ eine Rationalzahl darstellt, ist als bekannt anzusehen.

Sind in den Ausdrücken (ζ) die den daselbst angegebenen Bedingungen genügenden Konstanten auf Grund experimenteller Daten bestimmt, so ist es nach dem vorhergehenden im allgemeinen nicht möglich, die Existenz einer mittleren Bewegung festzustellen oder auszuschließen. Haben wir nämlich $\zeta=\zeta_0, \varrho=\varrho_0$ gefunden, so hat die bei den Beobachtungsresultaten stattfindende Unsicherheit meistens zur Folge, daß auch $\zeta=\zeta_0, \varrho=\varrho_0+\varepsilon$ zulässige Werte sind, wobei ε absolut genügend klein, sonst beliebig ist. Nach dem vorhergehenden kann aber ε einerseits so gewählt werden, daß eine mittlere Bewegung existiert, andererseits so, daß eine mittlere Bewegung nicht existiert. Immerhin ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß die Vorschriften, nach welchen die Konstanten der Ausdrücke (ζ) bestimmt werden, aus theoretischen Gründen eine Entscheidung der Frage gestatten, ob eine mittlere Bewegung existiert oder nicht. Ich habe daher in § 18 das oben genannte in der Theorie der säkularen Störungen vorkommende Problem nach dieser Richtung hin untersucht und bin dabei zu folgendem Resultat gelangt: *Bildet man die Gleichungen* (α) *oder* (β) *für den Fall dreier Planeten nach den Vorschriften von Laplace auf Grund von experimentellem Material und genügen die Konstanten* N_0, N_1, N_2 *oder* M_0, M_1, M_2 *den Bedingungen*

$$2|N_\mu|<|N_0|+|N_1|+|N_2|$$

resp.

$$2|M_\mu|<|M_0|+|M_1|+|M_2|,$$

so ist eine Entscheidung der Frage bezüglich der Existenz einer mittleren Bewegung unmöglich.

Zu dem, was oben hinsichtlich der Gleichungen (ζ) gesagt wurde, möchte ich noch folgendes hinzufügen. Der Fall „$\varrho=$ Rationalzahl“ ist, wie man ohne große Mühe zeigen könnte, nicht der einzige, in welchem eine mittlere Bewegung existiert. Gibt es eine solche, so bleibt $\varphi-c\cdot t$*) bei unbeschränkt wachsendem t zwischen endlichen Grenzen. Es ist aber, abgesehen vom Fall „$\varrho=$ Rationalzahl“, nicht möglich, $\varphi-c\cdot t$ in eine *Fourier*-sche Reihe**) zu entwickeln, sofern die letztere für alle t, welche größer als

*) c bedeutet hier die charakteristische Zahl von φ.

**) Es ist hier eine Reihe mit mehreren einer Variablen proportionalen Argumenten in der gebräuchlichen Anordnung gemeint.

eine gewisse Konstante sind, gleichmäßig konvergieren soll. Überhaupt gibt es keine Entwicklung der Form

$$(\lambda) \qquad \varphi - ct = \psi_1(t) + \psi_2(t) + \psi_3(t) + \cdots,$$

wenn verlangt wird, daß jede der Funktionen $\psi_\mu(t)$ für $t > t_0$ gleichmäßig stetig ist und die Reihe (λ) für alle $t > t_0$ gleichmäßig konvergiert. Diese Bedingungen hätten nämlich zur Folge, daß $\varphi(t)$ für $t > t_0$ gleichmäßig stetig wäre. Man könnte aber zeigen, daß dies nicht der Fall ist.

In bezug auf die äußere Form der folgenden Untersuchungen möchte ich bemerken, daß ich häufig von Veranschaulichungen Gebrauch gemacht habe. Der Leser wird jedoch hoffentlich erkennen, daß der rein analytischen Durchführung des gewählten Gedankenganges kein Hindernis entgegensteht.

Die Bedeutung des behandelten Problems für die Astronomie dürfte, wenigstens in seiner bisherigen Gestalt, gering sein. Man kann dasselbe jedoch auch als mathematische Frage auffassen, und es schien mir in jedem Fall geboten, die meiner Meinung nach unkorrekte Behandlung derselben zu verbessern.

I. *Betrachtungen allgemeiner Natur.*

§ 1.

In den ersten Paragraphen dieses Kapitels stelle ich eine Reihe von Bemerkungen zusammen, die trotz ihrer Einfachheit kaum zu umgehen waren.

Indem wir mit

$$A_1, A_2, \ldots A_n, \ \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n, \ g_1, g_2, \ldots g_n,$$

Konstanten*), mit t eine unbeschränkte Variable bezeichnen, setzen wir

$$(1.) \quad \begin{cases} \xi = A_1 \cos(g_1 t + \beta_1) + A_2 \cos(g_2 t + \beta_2) + \cdots + A_n \cos(g_n t + \beta_n), \\ \eta = A_1 \sin(g_1 t + \beta_1) + A_2 \sin(g_2 t + \beta_2) + \cdots + A_n \sin(g_n t + \beta_n). \end{cases}$$

*) In dieser Arbeit kommen nur reelle Größen vor.

Haben zwei g-Größen mit verschiedenem Index, etwa g_i und $g_\varkappa$, denselben Wert g, so können wir zunächst A und β so bestimmen, daß

$$A_i \cos \beta_i + A_\varkappa \cos \beta_\varkappa = A \cos \beta, \quad A_i \sin \beta_i + A_\varkappa \sin \beta_\varkappa = A \sin \beta$$

gilt, und hierauf

$$A_i \cos (g_i t + \beta_i) + A_\varkappa \cos (g_\varkappa t + \beta_\varkappa) = A \cos (gt + \beta),$$
$$A_i \sin (g_i t + \beta_i) + A_\varkappa \sin (g_\varkappa t + \beta_\varkappa) = A \sin (gt + \beta)$$

setzen.

Indem das genannte Verfahren nötigenfalls mehrmals angewandt wird, ergeben sich an Stelle der Ausdrücke (1.) Ausdrücke desselben Typus, in welchen jedoch keine Paare gleicher g-Koeffizienten vorkommen.

Da

$$A_i \cos (g_i t + \beta_i) = (-A_i) \cos (g_i t + \beta_i + \pi)$$

und

$$A_i \sin (g_i t + \beta_i) = (-A_i) \sin (g_i t + \beta_i + \pi)$$

gilt, so kann man die Ausdrücke (1.), ohne ihren Typus zu ändern, so transformieren, daß bei den cos und sin keine negativen Koeffizienten vorkommen.

§ 2.

Es mögen wieder zwei Ausdrücke ξ, η von der Form (1.) vorliegen. *Wir setzen voraus, daß mindestens ein A-Koeffizient nicht gleich Null ist, daß keine Paare gleicher g-Größen vorkommen und daß ξ und η für den speziellen t-Wert $t = t_0$ verschwinden.* Dann muß offenbar $n \geqq 2$ sein. Die für $t = t_0$ gebildeten Ableitungen von ξ, η bis zur Ordnung $n-1$ inkl. mögen mit

$$\xi_0', \eta_0', \xi_0'', \eta_0'', \ldots \xi_0^{(n-1)}, \eta_0^{(n-1)}$$

bezeichnet werden.

Diese letzteren Größen können nicht alle verschwinden. Wären sie nämlich alle gleich 0, so müßte, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ g_1^2 & g_2^2 & \dots & g_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_1^{n-1} & g_2^{n-1} & \dots & g_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet,

$$A_1 \cos(g_1 t_0 + \beta_1) = A_1 \sin(g_1 t_0 + \beta_1) = \dots = A_n \cos(g_n t_0 + \beta_n) = A_n \sin(g_n t_0 + \beta_n) = 0$$

gelten. Hieraus würde sich

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$$

ergeben, was der Voraussetzung widerspricht. Wir bezeichnen mit μ den kleinsten Wert von ν, für welchen $\xi_0^{(\nu)}, \eta_0^{(\nu)}$ nicht gleichzeitig verschwinden.

Es mögen nun $\xi(t)$, $\eta(t)$ als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes P aufgefaßt werden. Für $t = t_0$ fällt P mit dem Koordinatenanfangspunkt 0 zusammen; ist t von t_0 verschieden, liegt aber t_0 genügend nahe, so sind 0 und P von einander verschieden. Indem wir uns auf solche t-Werte beschränken, ziehen wir einen Vektor von 0 nach P. Die Richtungskosinus α, β dieses Vektors sind*)

$$\alpha = \frac{\xi(t)}{\sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}}, \qquad \beta = \frac{\eta(t)}{\sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)}}.$$

Von den Größen $\xi_0^{(\mu)}, \eta_0^{(\mu)}$ ist mindestens eine von Null verschieden. Wir wollen *zunächst* annehmen, es sei $\xi_0^{(\mu)} \neq 0$. Liegt t dem Werte t_0 genügend nahe, so ist dann $\xi(t) \neq 0$ und wir können schreiben

$$\alpha = \frac{\xi(t)}{|\xi(t)|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\eta(t)}{\xi(t)}\right)^2}}, \qquad \beta = \frac{\xi(t)}{|\xi(t)|} \cdot \frac{\left(\frac{\eta(t)}{\xi(t)}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\eta(t)}{\xi(t)}\right)^2}}.$$

*) Alle Quadratwurzeln sind in dieser Arbeit „nicht negativ“ zu nehmen.

Der Faktor $\frac{\xi(t)}{|\xi(t)|}$ ist gleich ± 1; er wechselt sein Zeichen nicht für $t > t_0$ und ebensowenig für $t < t_0$. Die Zeichen, welche $t > t_0$ und $t < t_0$ entsprechen, sind entgegengesetzt oder gleich, je nachdem μ eine ungerade oder gerade Zahl ist. Konvergiert t nach t_0, so konvergiert $\frac{\eta(t)}{\xi(t)}$ nach $\frac{\eta_0^{(\mu)}}{\xi_0^{(\mu)}}$. Bei allen diesen Bemerkungen ist t genügend nahe t_0 vorausgesetzt. Aus dem Gesagten schließen wir, daß α und β nach gewissen Grenzen α' und β' konvergieren, wenn t nach t_0 konvergiert und dabei $t > t_0$ gilt. Ferner schließen wir, daß α und β nach gewissen Grenzen α'' und β'' konvergieren, wenn t nach t_0 konvergiert und dabei $t < t_0$ gilt; und zwar haben wir $\alpha'' = -\alpha'$, $\beta'' = -\beta'$ oder $\alpha'' = \alpha'$, $\beta'' = \beta'$ je nachdem μ eine ungerade oder gerade Zahl ist.

Zu dem eben formulierten Ergebnis kommen wir in analoger Weise auch dann, wenn wir an Stelle der Annahme $\xi_0^{(\mu)} \neq 0$ die Annahme $\eta_0^{(\mu)} \neq 0$ einführen. Wir sind somit zu folgender Aussage berechtigt: *Die Richtung des Vektors OP strebt für $t \to t_0$, $t > t_0$ nach einer gewissen Grenzrichtung G und für $t \to t_0$, $t < t_0$ nach einer gewissen Grenzrichtung H. Die Richtungen G und H sind entgegengesetzt oder gleich, je nachdem μ eine ungerade oder gerade Zahl ist.*

§ 3.

Es mögen zwei Ausdrücke ξ, η von der Form (1.) gegeben sein. *Wir setzen voraus, daß nicht beide Funktionen ξ und η für alle t gleichzeitig verschwinden.* Dann können ξ, η, ohne daß dabei der Typus dieser Ausdrücke geändert wird, so geschrieben werden, daß nicht alle A-Koeffizienten verschwinden und keine gleichen g-Koeffizienten vorkommen. Falls für einen speziellen t-Wert ξ und η gleichzeitig verschwinden, soll dieser t-Wert ein *Nullwert* heißen. Für jeden Nullwert kann nach dem vorigen Paragraphen eine Zahl μ bestimmt werden; dieselbe möge die *Ordnung* des Nullwertes genannt werden. Zwischen zwei beliebig gewählten t-Werten kann nur eine endliche Zahl von Nullwerten liegen.

Für jeden t-Wert können Größen k und u bestimmt werden, welche den Bedingungen

$$(2.) \qquad k \cos u = \xi, \quad k \sin u = \eta$$

genügen. Ist der betreffende t-Wert ein Nullwert, so ist $k=0$, u beliebig. Andernfalls hat man bezüglich k die Wahl zwischen zwei von Null verschiedenen Werten, die sich allein durch das Zeichen unterscheiden. Hat man k gewählt, so hat man bezüglich u noch die Wahl zwischen unendlich vielen Größen. Die letzteren entspringen aus einer Größe durch Hinzufügen von beliebigen geraden Vielfachen von π. Zwei u-Werte, die verschiedenen k entsprechen, unterscheiden sich um ein ungerades Vielfaches von π.

Wir beweisen nun folgenden Satz: *Es gibt unendlich viele für alle t definierte und überall stetige Funktionen $\varphi(t)$, welche den Bedingungen*

$$(3.) \qquad \varrho(t)\,.\,\cos\varphi(t)=\xi(t), \quad \varrho(t)\,.\,\sin\varphi(t)=\eta(t)$$

bei geeigneter Wahl von $\varrho(t)$ genügen. Die Funktionen $\varphi(t)$ werden aus einer derselben durch Hinzufügen von beliebigen Vielfachen von π erhalten. Ist $\varphi(t)$ gewählt, so ist $\varrho(t)$ völlig bestimmt und für alle t stetig. Bedeutet t_0 einen speziellen t-Wert, der keinen Nullwert darstellt, und genügen k_0, u_0 den Bedingungen

$$(4.) \qquad k_0\cos u_0=\xi(t_0), \quad k_0\sin u_0=\eta(t_0)$$

so können $\varphi(t)$ und das entsprechende $\varrho(t)$ so gewählt werden, daß

$$(5.) \qquad \varrho(t_0)=k_0, \quad \varphi(t_0)=u_0$$

gilt.

Es bedeute nun $\mathfrak{T}$ ein zusammenhängendes t-Gebiet, welches jedoch nicht aus bloß einem t-Wert besteht. Es sei ferner $\varphi_1(t)$ eine für dieses Gebiet definierte und daselbst stetige Funktion, die den Bedingungen

$$(6.) \qquad \varrho_1(t)\cos\varphi_1(t)=\xi(t), \quad \varrho_1(t)\sin\varphi_1(t)=\eta(t)$$

bei geeigneter Wahl von $\varrho_1(t)$ genügt. Dann stimmt $\varphi_1(t)$ im Gebiete $\mathfrak{T}$ mit einer der oben charakterisierten Funktionen $\varphi(t)$ überein, während $\varrho_1(t)$ im Gebiet $\mathfrak{T}$ mit derjenigen Funktion $\varrho(t)$ zusammenfällt, welche dem genannten $\varphi(t)$ entspricht.

Jede $\varrho(t)$-Funktion besitzt folgende Eigenschaft:

Sind t_1 und t_2 zwei t-Werte, welche keine Nullwerte sind, so haben $\varrho(t_1)$ und $\varrho(t_2)$ gleiches oder ungleiches Zeichen, je nachdem zwischen t_1 und t_2 eine gerade) oder ungerade Zahl von Nullwerten ungerader Ordnung liegt.*

Um diese Behauptungen zu begründen, fassen wir $\xi(t)$, $\eta(t)$ als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes P auf. Ist t kein Nullwert, so ist P vom Koordinatenanfangspunkt verschieden und wir ziehen einen Vektor von O nach P. Die Länge dieses Vektors und seine Richtungskosinus sind Funktionen von t, welche für alle t mit Ausnahme der Nullwerte definiert sind. Wir bezeichnen die genannten Funktionen mit $r(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$; dieselben sind für jeden zugelassenen t-Wert stetig. Durch den Anfangs- und Endpunkt jedes Vektors denken wir uns eine Gerade gezogen. Auf diese Weise wird jedem t-Wert mit Ausnahme der Nullwerte eine Gerade zugeordnet. Es bedeute nun τ einen (etwa vorhandenen) Nullwert. Konvergiert t nach τ unter Beobachtung der Bedingung $t>\tau$, so strebt die Richtung des Vektors OP nach einer Grenzrichtung; dasselbe ist der Fall, wenn t nach τ konvergiert unter Beobachtung der Bedingung $<\tau$. Die beiden in Betracht kommenden Grenzrichtungen sind gleich oder entgegengesetzt**); die den Vektoren zugeordneten Geraden streben daher bei beiden Grenzprozessen nach ein und derselben Grenzlage. Die Gerade in dieser Grenzlage ordnen wir dem Werte $t=\tau$ zu. Indem wir dieses Verfahren auf jeden Nullwert anwenden, erhalten wir für *alle* t entsprechende Gerade. Erfolgt ein stetiger Übergang von einem t-Wert zu einem andern, so ändert die zugeordnete Gerade ihre Lage ebenfalls in stetiger Weise. Aus dem Gesagten schließen wir: Man kann eine für alle t definierte und überall stetige Funktion $\psi(t)$ angeben, welche für jeden t-Wert eine Amplitude***) der t entsprechenden Geraden angibt.

Nach dem Vorhergehenden haben wir für alle t mit Ausnahme der Nullwerte

---

*) Hierher gehört auch der Fall, daß zwischen t_1 und t_2 keine Nullwerte ungerader Ordnung liegen.

**) Bei den letzten Aussagen stützen wir uns auf die Ergebnisse des letzten Paragraphen.

***) Amplitude einer Geraden heißt jede Amplitude der beiden entgegengesetzten Richtungen der Geraden.

$$(7.) \qquad \cos\psi(t) = \delta(t)\cdot\alpha(t), \quad \sin\psi(t) = \delta(t)\cdot\beta(t).$$

Hierbei ist $\delta(t)$ eine für die eben genannten t definierte Funktion, welche nur die Werte $+1$ oder -1 annimmt. Wir definieren noch für *alle* t eine Funktion $\sigma(t)$. Dieselbe sei für jeden Nullwert gleich 0; für jeden t-Wert, der kein Nullwert ist, sei $\sigma(t) = \delta(t)\cdot r(t)$.

Nach dem Gesagten gilt für *alle* t

$$(8.) \qquad \sigma(t)\cdot\cos\psi(t) = \xi(t), \qquad \sigma(t)\sin\psi(t) = \eta(t).$$

Damit haben wir die erste Behauptung unseres Satzes bewiesen. Die Richtigkeit der unmittelbar darauf folgenden Aussagen ist offenbar, und es wird genügen, den Beweis der das Zeichen von $\varrho(t)$ betreffenden Behauptung anzuführen; dieselbe nimmt in unserem Satz die letzte Stelle ein.

Für alle t, welche keine Nullpunkte sind, haben wir

$$(9.) \qquad \varrho(t)\cos\varphi(t) = r(t)\cdot\alpha(t), \qquad \varrho(t)\sin\varphi(t) = r(t)\cdot\beta(t).$$

Wir bemerken ferner, daß $\varrho(t)$ beim stetigen Wachsen von t sein Zeichen nur bei einem Nullwert von t ändern kann. Es sei nun $t=\tau$ ein etwa vorhandener Nullwert. Wir stellen uns zunächst vor, daß t nach τ konvergiert unter Beobachtung der Bedingung $t>\tau$. $\alpha(t), \beta(t)$ konvergieren dann nach bestimmten Grenzen α_1, β_1; ferner ist hierbei, falls t dem Wert τ genügend nahe liegt, $\frac{r(t)}{\varrho(t)}$ gleich einer Konstanten δ, welche entweder gleich $+1$ oder gleich -1 ist. Wir haben also

$$(10.) \qquad \cos\varphi(\tau) = \delta\cdot\alpha_1, \qquad \sin\varphi(\tau) = \delta\cdot\beta_1.$$

Wir stellen uns zweitens vor, daß t nach τ konvergiert unter Beobachtung der Bedingung $t<\tau$. Dann konvergieren $\alpha(t)$, $\beta(t)$ nach festen Grenzen α_2, β_2. $\frac{r(t)}{\varrho(t)}$ ist hierbei für t-Werte, welche τ genügend nahe liegen, gleich einer Konstanten ε, die entweder gleich $+1$ oder gleich -1 ist. Wir haben also

$$(11.) \qquad \cos\varphi(\tau) = \varepsilon\cdot\alpha_2 \qquad \sin\varphi(\tau) = \varepsilon\cdot\beta_2$$

und mit Berücksichtigung von (10.)

$$(12.) \qquad \delta\cdot\alpha_1 = \varepsilon\cdot\alpha_2, \qquad \delta\cdot\beta_1 = \varepsilon\cdot\beta_2.$$

Je nachdem τ ein Nullwert gerader oder ungerader Ordnung ist, haben wir $\alpha_1=\alpha_2$, $\beta_1=\beta_2$ oder $\alpha_1=-\alpha_2$, $\beta_1=-\beta_2$. Im ersten Fall gilt also nach (12.) $\delta=\varepsilon$, im zweiten Fall $\delta=-\varepsilon$. Wir schließen daraus, daß $\varrho(t)$ für $t>\tau$ und $t<\tau$ im ersten Fall dasselbe Zeichen, im zweiten Fall entgegengesetztes Zeichen besitzt. Hierbei wird vorausgesetzt, daß t dem Nullwert τ genügend nahe liegt. Somit erkennen wir: Passiert t stetig wachsend einen Nullwert, so ändert $\varrho(t)$ sein Zeichen dann und nur dann, wenn der Nullwert *ungerader* Ordnung ist. Damit ist unser Satz vollständig bewiesen. Bezüglich der Verwertung desselben für die präzise Formulierung der uns beschäftigenden Probleme verweisen wir auf das in der Einleitung dieser Arbeit Gesagte.

§ 4.

Es mögen zwei Ausdrücke ξ, η von der Form (1.) vorliegen. Wir schließen wiederum den Fall aus, in welchem beide Ausdrücke gleichzeitig für alle t verschwinden. Es gibt dann, wie wir wissen, Funktionen $\varphi(t)$, welche für alle t stetig sind und den Bedingungen

$$(13.)\qquad \varrho(t)\cdot\cos\varphi(t)=\xi(t), \qquad \varrho(t)\cdot\sin\varphi(t)=\eta(t)$$

bei geeigneter Wahl von $\varrho(t)$ genügen.

Existiert für *eine* der genannten φ-Funktionen eine solche Konstante g, daß $\varphi(t)-g\cdot t$ für unbeschränkt wachsende t zwischen endlichen Grenzen bleibt, so gilt Entsprechendes für alle φ-Funktionen; dabei hat g einen bestimmten Wert, welcher für alle φ-Funktionen derselbe ist. Tritt der gekennzeichnete Fall ein, so sagen wir, *es existiere eine mittlere Bewegung, und nennen g die Konstante der mittleren Bewegung.* Sind ξ, η eingliedrig, so existiert offenbar eine mittlere Bewegung. Indem wir diesen Fall beiseite lassen, weisen wir zunächst auf zwei Spezialfälle hin, in welchen ebenfalls eine mittlere Bewegung existiert.

A. *Wir wollen annehmen, daß*

$$(14.)\qquad g_2-g_1=m_2\cdot c, \qquad g_3-g_1=m_3\cdot c, \quad \ldots \quad g_n-g_1=m_n\cdot c$$

gesetzt werden kann, wobei $m_2, m_3, \ldots m_n$ ganze Zahlen sind und c irgend eine

Konstante bedeutet. Dann existiert eine mittlere Bewegung. Um die Richtigkeit dieser Behauptung einzusehen, bemerken wir zunächst, daß es genügt, den Fall $c \neq 0$ zu betrachten. Im Falle $c = 0$ wären nämlich die g-Größen alle unter einander gleich. Wir könnten also nach § 1 die Ausdrücke ξ, η in eingliedriger Form schreiben, sodaß die Existenz einer mittleren Bewegung offenbar ist. Es mögen nun die für alle t stetigen Funktionen $\varrho(t), \varphi(t)$ so bestimmt sein, daß,

$$\varrho(t)\cos\varphi(t) = \xi(t), \qquad \varrho(t)\sin\varphi(t) = \eta(t)$$

gilt. Wir haben dann

$$(15.)\quad \begin{cases} \varrho(t)\cos[\varphi(t) - g_1 t] = A_1\cos\beta_1 + A_2\cos[m_2\cdot c\cdot t + \beta_2] \\ \qquad\qquad + \cdots + A_n\cos[m_n\cdot c\cdot t + \beta_n], \\ \varrho(t)\sin[\varphi(t) - g_1 t] = A_1\sin\beta_1 + A_2\sin[m_2\cdot c\cdot t + \beta_2] \\ \qquad\qquad + \cdots + A_n\sin[m_n\cdot c\cdot t + \beta_n]. \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$(16.)\quad \begin{cases} \varrho(t)\cos[\varphi(t) - g_1 t] = \varrho\left(t + \frac{2\pi}{c}\right)\cos\left[\varphi\left(t + \frac{2\pi}{c}\right) - g_1\left(t + \frac{2\pi}{c}\right)\right], \\ \varrho(t)\sin[\varphi(t) - g_1 t] = \varrho\left(t + \frac{2\pi}{c}\right)\sin\left[\varphi\left(t + \frac{2\pi}{c}\right) - g_1\left(t + \frac{2\pi}{c}\right)\right]. \end{cases}$$

Ist nun t kein Nullwert, so folgt aus (16.)

$$(17.)\qquad \varphi(t) - g_1\cdot t = \varphi\left(t + \frac{2\pi}{c}\right) - g_1\cdot\left(t + \frac{2\pi}{c}\right) + \nu\cdot\pi,$$

wobei ν eine ganze Zahl ist. Da $\varphi(t)$ stetig ist, so gilt (17.) für alle t, und zwar hat ν für alle t denselben Wert. Wir haben somit für alle t

$$\varphi(t) - g_1\cdot t + \frac{\nu\cdot c}{2}t = \varphi\left(t + \frac{2\pi}{c}\right) - g_1\left(t + \frac{2\pi}{c}\right) + \frac{\nu\cdot c}{2}\left(t + \frac{2\pi}{c}\right).$$

Es ist daher $\varphi(t) - g_1\cdot t + \frac{\nu\cdot c}{2}t$ eine stetige mit der Periode $\frac{2\pi}{c}$ periodische Funktion. Dieselbe bleibt daher für alle t zwischen endlichen Grenzen.

Damit ist die Richtigkeit unserer Behauptung bewiesen. Sind die zu Anfang von § 4 hinsichtlich ξ, η angeführten Voraussetzungen erfüllt, ist ferner $n=2$, so haben wir offenbar einen zu A. gehörenden Fall vor uns; es existiert daher eine mittlere Bewegung. Dies ist natürlich längst bekannt; überhaupt ist der in A angegebene Satz nicht neu*).

B. Die zu Anfang unseres Paragraphen formulierten Voraussetzungen behalten wir bei und *ergänzen dieselben durch die Annahme* $|A_1| = |A_2| + |A_3| + \cdots + |A_n|$. *Ferner setzen wir voraus, daß mindestens zwei von einander verschiedene Nullwerte t' und t'' vorhanden sind.***) *Es existiert dann eine mittlere Bewegung.*

Um diese Behauptung zu begründen, bemerken wir zunächst, daß A_1 von Null verschieden ist und daß unter den $A_2, A_3, \ldots A_n$ von Null verschiedene Größen vorkommen müssen. Die letzteren seien $A_a, A_b, \ldots A$. Wir können schreiben

$$\xi(t) = |A_1| \cos(g_1 t + \beta_1') + |A_a| \cos(g_a t + \beta_a') + \cdots + |A_c| \cos(g_c t + \beta_c'),$$
$$\eta(t) = |A_1| \sin(g_1 t + \beta_1') + |A_a| \sin(g_a t + \beta_a') + \cdots + |A_c| \sin(g_c t + \beta_c'),$$

wobei β_ν' gleich β_ν oder gleich $\beta_\nu + \pi$ ist, je nachdem A_ν eine positive oder negative Zahl darstellt. Ist t ein Nullwert, so folgt hieraus

$$0 = |A_1| + |A_a| \cos[(g_a - g_1)t + \beta_a' - \beta_1'] + \cdots + |A_c| \cos[(g_c - g_1)t + \beta_c' - \beta_1'].$$

Es muß daher für den genannten Nullwert

$$\cos[(g_a - g_1)t + \beta_a' - \beta_1'] = \cos[(g_b - g_1)t + \beta_b' - \beta_1'] = \cdots$$
$$= \cos[(g_c - g_1)t + \beta_c' - \beta_1'] = -1$$

gelten. Wenden wir das Gesagte auf die Nullwerte t' und t'' an, so erkennen wir, daß

---

*) Man vergleiche die oben angeführte Arbeit von Herrn *Cavallin*.

**) Dieser Teil der Voraussetzung kann, wie wir später sehen werden, fortbleiben.

$$(18.)\quad \begin{cases} (g_a - g_1)t' + \beta'_a - \beta'_1 = (2\nu'_a + 1)\pi, \ \dots \\ \qquad\qquad (g_c - g_1)t' + \beta'_c - \beta'_1 = (2\nu'_c + 1)\pi, \\ (g_a - g_1)t'' + \beta'_a - \beta'_1 = (2\nu''_a + 1)\pi \dots \\ \qquad\qquad (g_c - g_1)t'' + \beta'_c - \beta'_1 = (2\nu''_c + 1)\pi, \end{cases}$$

wobei $\nu'_a, \dots \nu'_c, \nu''_a, \dots \nu''_c$ ganze Zahlen bedeuten. Aus den Gleichungen (18.) folgt

$$g - g_1 = (\nu''_a - \nu'_a)\cdot\frac{2\pi}{t'' - t'}, \ \dots g_c - g_1 = (\nu''_c - \nu'_c)\cdot\frac{2\pi}{t'' - t'}.$$

Wir können daher den in A. entwickelten Satz anwenden und erkennen die Richtigkeit unserer Behauptung.

§ 5.

Es mögen zwei Ausdrücke Ξ, H von der Form

$$(19.)\quad \begin{cases} \Xi = A_1 \cos u_1 + A_2 \cos u_2 + \dots + A_n \cos u_n, \\ H = A_1 \sin u_1 + A_2 \sin u_2 + \dots + A_n \sin u_n \end{cases}$$

gegeben sein. Dabei mögen die $A_1, A_2, \dots A_n$ alle größer als Null sein. Wir wählen nun ein rechtwinkliges Koordinatensystem und ziehen n Vektoren von den resp. Längen $A_1, A_2, \dots A_n$ in der folgenden Weise. Der Anfangspunkt des ersten Vektors liege im Koordinatenanfangspunkt O, und u_1 sei eine Amplitude des genannten Vektors. Der Anfangspunkt des zweiten Vektors (falls $n > 1$ ist) möge mit dem Endpunkt des ersten zusammenfallen, und u_2 sei eine Amplitude des zweiten Vektors usw. Den Endpunkt des n-ten Vektors bezeichnen wir mit Q. Ist $\Xi = H = 0$, so fallen O und Q zusammen; verschwinden Ξ, H nicht gleichzeitig, so sind diese Größen die Projektionen desjenigen Vektors auf die Axen, dessen Anfangs- und Endpunkt durch O und Q gebildet werden. Bezeichnet R die Länge dieses Vektors OQ und Φ eine Amplitude desselben, so haben wir

$$(20.)\qquad R\cos\Phi = \Xi, \quad R\sin\Phi = H.$$

Die genannte Art der Veranschaulichung*) wollen wir nun benutzen, um die Existenz einer mittleren Bewegung in zwei Spezialfällen zu erkennen. Der erste derselben ist nichts anderes, als der allbekannte in unserer Einleitung erwähnte Fall.

A. *Es mögen zwei Ausdrücke* ξ, η *von der Form* (1.) *vorliegen;* n *sei größer als* 1. *Ferner setzen wir voraus, daß die* $A_1, A_2, \dots A_n$ *alle positiv sind und* $A_1 > A_2 + A_3 + \cdots + A_n$ *gilt. Dann gibt es eine mittlere Bewegung.*

Um dies einzusehen, ziehen wir n Vektoren von den Längen $A_1, A_2, \dots A_n$ in der oben geschilderten Weise, wobei wir an Stelle von $u_1, u_2, \dots u_n$ die Größen $g_1 t + \beta_1$, $g_2 t + \beta_2, \dots g_n t + \beta_n$ treten lassen. Die Figur 1 mag dieses (für $n = 4$) veranschaulichen.

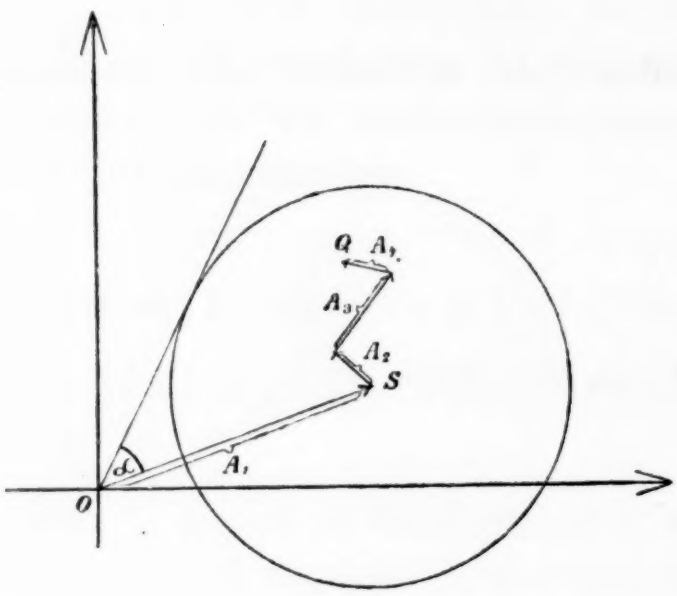

Fig. 1.

Der Endpunkt Q des letzten Vektors liegt offenbar nicht außerhalb des Kreises, welcher um den Endpunkt S des ersten Vektors mit dem Radius $A_2 + \cdots + A_n$ gezogen worden ist. Q kann daher nicht mit O zusammenfallen, und es existieren für ξ, η keine Nullwerte. Wir bezeichnen noch mit α diejenige Zahl, welche durch

$$\sin \alpha = \frac{A_2 + A_3 + \cdots + A_n}{A_1} \qquad \left(0 < \alpha < \tfrac{\pi}{2}\right)$$

bestimmt ist. Der Winkel zwischen dem Vektor OQ (mit dem Endpunkt Q) und dem ersten Vektor ist nicht größer als α. Es seien endlich $\varrho(t)$, $\varphi(t)$ für alle t stetige Funktionen, welche den Bedingungen

$$\varrho(t) \cos \varphi(t) = \xi(t), \qquad \varrho(t) \sin \varphi(t) = \eta(t)$$

genügen; und zwar sei $\varrho(t) > 0$ gewählt, was möglich ist. $\varphi(t)$ stellt dann eine Amplitude des Vektors OQ dar. Nach dem Gesagten können wir schreiben

*) Dieselbe findet sich bereits in der Hauptsache bei *Lagrange*, welcher zur Veranschaulichung Epizyklen benutzt.

$$\varphi(t)-g_1 t-\beta_1=\nu\cdot 2\pi+\omega, \qquad (|\omega|\leq\alpha)$$

wobei ν eine ganze Zahl bedeutet. Da $\varphi(t)$ stetig ist, so hat ν für alle t denselben Wert. Somit existiert in der Tat eine mittlere Bewegung. Man kann hinzufügen, *daß die Werte von* $\varphi(t)-g_1 t$ *für zwei verschiedene* t*-Werte sich nicht um mehr als* 2α *unterscheiden können.*

B. *Es mögen dieselben Voraussetzungen eingeführt werden wie in* A., *nur wollen wir die Annahme* $A_1 > A_2+A_3+\cdots+A_n$ *durch die andere* $A_1=A_2+A_3+\cdots+A_n$ *ersetzen und ferner den Fall ausschließen, daß* ξ, η *für alle* t *gleichzeitig verschwinden. Dann gibt es eine mittlere Bewegung.*

Der Fall, in welchem zwei verschiedene Nullwerte angebbar sind, ist durch das in § 4B Gesagte erledigt. Schließen wir diesen Fall aus, so existiert eine Konstante k von der Beschaffenheit, daß es keinen Nullwert $> k$ gibt. Indem wir uns auf t-Werte $> k$ beschränken, machen wir dieselbe geometrische Konstruktion, wie in § 5A. Figur 2 erläutert dieselbe für $n=4$. Der Endpunkt Q des letzten Vektors liegt dann nicht außerhalb desjenigen Kreises, welcher mit dem Radius A_1 um den Endpunkt S des ersten Vektors gezogen ist. Außerdem kann Q nicht mit O zusammenfallen.

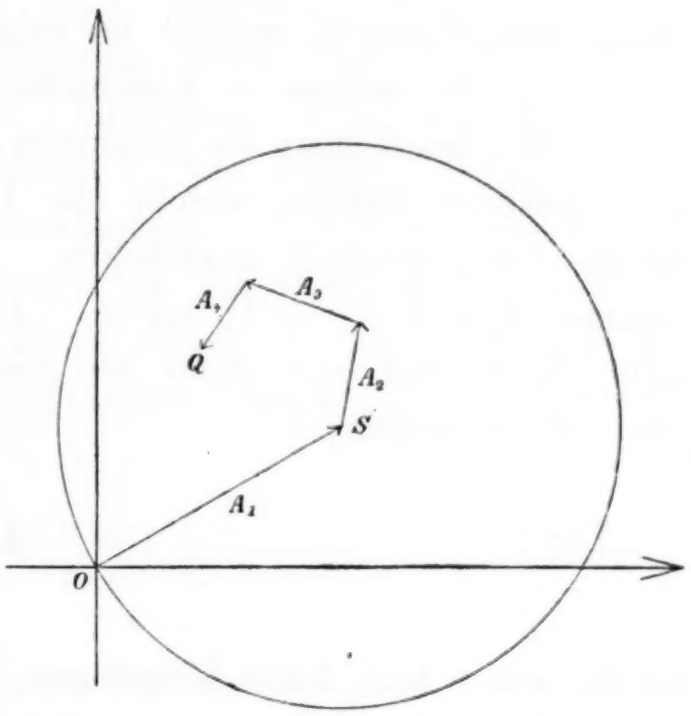

Fig. 2.

Wir bestimmen nun für alle t stetige Funktionen $\varrho(t)$, $\varphi(t)$ in der Weise, daß

$$\varrho(t)\cos\varphi(t)=\xi(t), \qquad \varrho(t)\sin\varphi(t)=\eta(t)$$

gilt. Diese Bestimmung soll so erfolgen, daß für $t>k$ $\varrho(t)>0$ ist, was erreicht werden kann. Für $t>k$ stellt dann $\varphi(t)$ eine Amplitude des Vektors OQ (Q Endpunkt) dar. Da dieser Vektor mit dem Vektor OS einen Winkel $<\frac{\pi}{2}$ macht, so können wir für jedes $t>k$

$$\varphi(t) - g_1 t - \beta_1 = \nu \cdot 2\pi + \omega \qquad \left(|\omega| < \tfrac{\pi}{2}\right)$$

schreiben, wobei ν eine ganze Zahl bedeutet. Aus der Stetigkeit von $\varphi(t)$ folgt, daß ν für alle $t > k$ denselben Wert hat. Damit ist die Richtigkeit unserer Behauptung bewiesen.

§ 6.

In diesem Paragraphen vereinigen wir zunächst unter A. und B. einige Bemerkungen, welche im folgenden benutzt werden.

A. Es mögen n Abschnitte von Geraden vorliegen, und zwar sei $n > 1$. Wir bezeichnen die genannten Abschnitte mit $L_1, L_2, \ldots L_n$. $A_1, A_2, \ldots A_n$ seien positive Zahlen, welche die Längen von $L_1, L_2, \ldots L_n$ durch eine gewählte Längeneinheit ausdrücken. Der Kürze wegen bezeichnen wir die Summe $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ mit S. *Durch Aneinanderreihen von* $L_1, L_2, \ldots L_n$ *kann dann und nur dann ein geschlossener Linienzug hergestellt werden, wenn die Bedingungen*

$$(21.) \qquad A_\mu \leqq \frac{S}{2} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots n)$$

erfüllt sind. Man kann hinzufügen, daß für $n \geqq 3$ durch Aneinanderreihen von $L_1, L_2, \ldots L_n$ stets ein eigentliches oder uneigentliches Dreieck hergestellt werden kann, sobald nur die Bedingungen (21.) erfüllt sind. Für $n = 3$ ist dies klar; für $n > 3$ beweisen wir die Richtigkeit dieser Bemerkung durch den Schluß von n auf $n+1$. Es werde demgemäß angenommen, die gemachte Aussage gelte für den Spezialwert $n = \nu \geqq 3$. Um zu zeigen, daß die Aussage auch für $n = \nu + 1$ gilt, ordnen wir im letzteren Fall die $A_1, A_2, \ldots A_n$ so an, daß niemals ein kleinerer Wert einem größeren folgt. Auf diese Weise möge sich $a_1, a_2, \ldots a_{\nu+1}$ ergeben. Da $\nu + 1 \geqq 4$ ist, so gilt, wenn die Summe $a_1 + a_2$ mit s bezeichnet wird,

$$s \leqq a_3 + a_4 + \cdots + a_{\nu+1}$$

und folglich

$$(22.) \qquad s \leqq \frac{s + a_3 + a_4 + \cdots + a_{\nu+1}}{2}.$$

Nach der Voraussetzung haben wir

$$(23.) \qquad a_\mu < \frac{s + a_3 + a_4 + \cdots + a_{\nu+1}}{2} \qquad (\mu = 3, 4, \ldots \nu + 1)$$

Somit kann aus s, a_3, $a_4, \ldots a_{\nu+1}$ ein Dreieck konstruiert werden. Damit ist die Richtigkeit unserer Bemerkung bewiesen.

B. Kann ein Punktsystem auf einer Geraden dadurch erhalten werden, daß man zu einem Punkte Q des Systems alle Punkte hinzufügt, die von Q um ein ganzes Vielfaches der von Null verschiedenen Länge a abstehen, so wollen wir sagen, das Punktsystem bilde eine Punktfolge (a). Es mögen m Punktfolgen $(a_1), (a_2), \ldots (a_m)$ vorliegen. P_1 sei ein Punkt von (a_1), P_2 ein Punkt von (a_2) usw., endlich P_m ein Punkt von (a_m). Wir sagen dann: $P_1, P_2, \ldots P_m$ bilden einen Punkthaufen. Stehen je zwei Punkte eines Punkthaufens voneinander um weniger als die von Null verschiedene Länge ε ab, so sagen wir, es liege ein Punkthaufen $\{\varepsilon\}$ vor. Genügen die durch irgendeine Einheit zahlenmäßig ausgedrückten Längen $a_1, a_2, \ldots a_m$ keiner Gleichung

$$\frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} + \cdots + \frac{n_m}{a_m} = 0$$

($n_1, n_2, \ldots n_m$ bedeuten ganze Zahlen, welche nicht sämtlich verschwinden), so wollen wir die Längen als voneinander unabhängig bezeichnen. In einer früher erschienenen Arbeit*) habe ich folgenden Satz bewiesen: *Es mögen m von Null verschiedene und voneinander unabhängige Längen $a_1, a_2, \ldots a_m$ gegeben sein und außerdem eine von Null verschiedene Länge ε. Es existiert dann eine solche Länge T, daß folgende Aussage gilt: Wie man auch eine Strecke**) von der Länge T und m Punktfolgen $(a_1), (a_2), \ldots (a_m)$ auf einer Geraden annehmen möge, stets liegt auf der genannten Strecke ein Punkthaufen $\{\varepsilon\}$.*

---

*) *P. Bohl*, Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie, Dieses Journal Bd. 131, S. 277.

Soweit die Anwendung dieses Satzes im folgenden in Frage kommt, wäre es übrigens bequemer, denselben in modifizierter Form auszusprechen.

**) Die beiden Grenzpunkte der Strecke sollen, wie wir der Genauigkeit wegen bemerken, nicht zu der Strecke gerechnet werden.

C. **Es mögen zwei Ausdrücke ξ, η von der Form (1.) vorliegen.** *Wir setzen $n > 1$ voraus und wollen annehmen, daß keine Beziehungen der Form*

$$(24.) \qquad m_2(g_2 - g_1) + m_3(g_3 - g_1) + \cdots + m_n(g_n - g_1) = 0$$

bestehen. Hierbei bedeuten $m_2, m_3, \ldots m_n$ ganze Zahlen, welche nicht gleichzeitig verschwinden. **Indem wir mit $u_1, u_2, \ldots u_n$ n Variable bezeichnen, setzen wir**

$$\Xi = A_1 \cos u_1 + A_2 \cos u_2 + \cdots + A_n \cos u_n,$$

$$H = A_1 \sin u_1 + A_2 \sin u_2 + \cdots + A_n \sin u_n.$$

Jeder positiven Zahl p entspricht eine solche positive Zahl q, daß folgendes gilt:

Sind Ξ_0, H_0 diejenigen Ξ, H-Werte, die irgendwelchen Spezialwerten

$$u_1 = u_1^0, \; u_2 = u_2^0, \ldots u_n = u_n^0$$

entsprechen, so findet sich zwischen zwei voneinander um q abstehenden Zahlen immer ein t-Wert, für welchen

$$|\sqrt{\xi^2 + \eta^2} - \sqrt{\Xi_0^2 + H_0^2}| < p.$$

Um diesen Satz zu beweisen, bestimmen wir eine solche positive Zahl $\varkappa$, daß folgendes gilt: Sind

$$u_1', u_2', \ldots u_n' \text{ und } u_1'', u_2'', \ldots u_n''$$

irgendwelche den Bedingungen

$$|u_1' - u_1''| < \varkappa, \; |u_2' - u_2''| < \varkappa, \ldots |u_n' - u_n''| < \varkappa$$

genügende Spezialwerte von $u_1, u_2, \dots u_n$ und bezeichnen Ξ_1, H_1 und Ξ_2, H_2 die entsprechenden Werte von Ξ, H, so haben wir

$$|\sqrt{\Xi_1^2 + H_1^2} - \sqrt{\Xi_2^2 + H_2^2}| < p.$$

Die Wahl von $\varkappa$ kann geschehen, wenn p und die $A_1, A_2, \dots A_n$ bekannt sind. Wir bezeichnen ferner mit γ den größten unter den $|g_\mu - g_1|$ $(\mu = 2, 3, \dots n)$ vorkommenden Wert.*)

Nach Wahl einer Längeneinheit mögen nun in bekannter Weise die Zahlen

$$(25.) \qquad \frac{u_\mu^0 - u_1^0 - \beta_\mu + \beta_1}{g_\mu - g_1} \qquad (\mu = 2, 3, \dots n)$$

durch diejenigen Punkte $P_2, P_3, \dots P_n$ auf einer Geraden dargestellt werden, deren Abszissen die Zahlen (25.) sind. Die genannten $n-1$ Punkte wählen wir als spezielle Elemente von $n-1$ entsprechenden Punktfolgen

$$\left(\frac{2\pi}{|g_2 - g_1|}\right), \left(\frac{2\pi}{|g_3 - g_1|}\right), \dots \left(\frac{2\pi}{|g_n - g_1|}\right).$$

Nach dem in § 6B angeführten Satz existiert dann eine solche Länge q, daß folgende Aussage gilt: Wie man auch eine Strecke von der Länge q auf der Geraden annehmen möge, stets liegt auf der genannten Strecke ein Punkthaufen $\left\{\frac{\varkappa}{\gamma}\right\}$. Die Wahl von q kann dabei geschehen, wenn

$$|g_2 - g_1|, \ |g_3 - g_1|, \dots |g_n - g_1| \ \text{ und } \ \varkappa$$

bekannt sind. Nun denken wir uns zwei Zahlen, die voneinander um q abstehen. Stellen wir diese Zahlen auf der Geraden dar, so geben sie eine Strecke von der Länge q. Auf dieser Strecke haben wir, wie eben ge-

*) Aus der Voraussetzung folgt offenbar, daß die $g_1, g_2, \dots g_n$ alle voneinander verschieden sind.

sehen, einen Punkthaufen $\left\{\frac{\varkappa}{\gamma}\right\}$. Der zur Punktfolge $\left(\frac{2\pi}{|g_2-g_1|}\right)$ gehörige Punkt dieses Punkthaufens stelle die Zahl t_0 dar. Dann gilt

$$t_0 - \frac{u_\mu^0 - u_1^0 - \beta_\mu + \beta_1}{g_\mu - g_1} = n_\mu \cdot \frac{2\pi}{g_\mu - g_1} + \varepsilon_\mu, \qquad (\mu = 2, 3, \ldots n)$$

wobei die n_μ ganze Zahlen sind und

$$|\varepsilon_\mu| < \frac{\varkappa}{\gamma} \leqq \frac{\varkappa}{|g_\mu - g_1|}.$$

Wir haben

$$(g_\mu - g_1)\, t_0 + \beta_\mu - \beta_1 = n_\mu \cdot 2\pi + u_\mu^0 - u_1^0 + \eta_\mu. \qquad (|\eta_\mu| < \varkappa)$$

Setzen wir noch

$$u_1^0 - g_1 t_0 - \beta_1 = s,$$

so ergibt sich

$$g_\mu t_0 + \beta_\mu = n_\mu \cdot 2\pi + u_\mu^0 - s + \eta_\mu,$$

$$g_1 t_0 + \beta_1 = u_1^0 - s. \qquad (\mu = 2, 3, \ldots n)$$

$\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}$, d. h. $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$

gebildet für $t = t_0$ ist gleich

$$\sqrt{\Xi^2 + H^2}$$

gebildet für

$$u_1 = u_1^0 - s, \quad u_\mu = u_\mu^0 - s + \eta_\mu$$

und auch offenbar gleich

$$\sqrt{\Xi^2 + H^2}$$

gebildet für

$$u_1 = u_1^0, \quad u_\mu = u_\mu^0 + \eta_\mu.$$

Der zuletzt genannte Wert von

$$\sqrt{\Xi^2 + H^2}$$

unterscheidet sich aber von

$$\sqrt{\Xi_0^2 + H_0^2}$$

um weniger als p. Somit haben wir

$$|\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2} - \sqrt{\Xi_0^2 + H_0^2}| < p.$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Wir gehen nun zu einer Anwendung des eben besprochenen Satzes über. *Die zu Anfang von* C. *eingeführten Voraussetzungen mögen beibehalten werden; dieselben sollen jedoch durch die Annahme ergänzt werden, daß*

$$|A_\mu| \leqq \frac{S}{2}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots n) \tag{26.}$$

wobei S die Summe aller $|A|$-Größen bedeutet. Jeder positiven Zahl p entspricht dann eine solche positive Zahl q, daß zwischen zwei voneinander um q abstehenden Zahlen immer ein t-Wert existiert, für welchen $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} < p$ gilt.

Sollten alle A-Größen gleich Null sein, so ist die Richtigkeit unserer Behauptung evident; wir können daher diesen Fall ausschließen. Dann müssen mindestens zwei A-Größen von Null verschieden sein; es seien $A_a, A_b, \ldots A_c$ diejenigen A-Größen, welche nicht verschwinden. Wir bestimmen nun Geradenabschnitte $L_a, L_b, \ldots L_c$, deren Längen mit Hilfe irgend einer Einheit durch die Zahlen $|A_a|, |A_b|, \ldots |A_c|$ ausgedrückt werden. Nach § 6 A. kann durch Aneinanderreihen von $L_a, L_b, \ldots L_c$ ein geschlossener Linienzug erhalten werden. Hieraus schließen wir, daß $u_1^0, u_2^0, \ldots u_n^0$ so bestimmt werden können, daß

$$A_1 \cos u_1^0 + A_2 \cos u_2^0 + \cdots + A_n \cos u_n^0 = 0,$$

$$A_1 \sin u_1^0 + A_2 \sin u_2^0 + \cdots + A_n \sin u_n^0 = 0$$

gilt. Die Anwendung des zu Anfang von C. ausgesprochenen Satzes führt nun unmittelbar zur Erkenntnis der Richtigkeit unserer Behauptung.

Hinsichtlich der Bedeutung der Ergebnisse unseres Paragraphen für die Theorie der säkularen Störungen verweisen wir auf das in der Einleitung Gesagte.

II. *Hilfssätze aus der Geometrie der Zahlen.*

§ 7.

Zunächst bemerke ich, daß die in diesem Kapitel benutzten Buchstabenbezeichnungen stets nur für je einen Paragraphen Geltung haben.

A. Es möge ein Kreis vorliegen, dessen Umfang gleich der Längeneinheit*) ist. Außerdem sei ein Faden von der Länge $l (l > 0)$ gegeben. Diesen Faden wickeln wir auf die Peripherie auf, indem wir bei irgend einem Punkte beginnen und eine beliebige der zwei zu Gebote stehenden Richtungen einschlagen. Es sei nun P irgend ein Punkt der Kreisperipherie. Die Anzahl der mit P zusammenfallenden Fadenpunkte**) bezeichnen wir mit q; q ist demnach eine nicht negative ganze Zahl. *Wie leicht zu sehen, gilt*

$$l-1 \leqq q \leqq l+1.$$

Es möge nun eine Strecke AB von der Länge $s\,(0 < s < 1)$ irgendwo auf der Kreisperipherie angenommen werden; die Endpunkte A, B der Strecke sollen dabei als nicht zu der letzteren gehörig angesehen werden. Wir fassen diejenigen Fadenteile ins Auge, welche die ganze Strecke AB kontinuierlich bedecken. Dabei ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß es derartige Fadenteile überhaupt nicht gibt; ihre Anzahl bezeichnen wir mit t. t ist demnach eine nicht negative ganze Zahl. Für irgend einen Punkt auf der Strecke AB gilt, wie leicht zu sehen,

$$t \leqq q \leqq t+2,$$

wobei die Bedeutung von q aus dem vorhergehenden zu ersehen ist. Indem wir die oben erwähnte Beziehung

*) Wir denken uns für das folgende eine Längeneinheit fest gewählt. Unter einer „Länge a“, wobei a eine nicht negative Zahl ist, verstehen wir eine Länge, welche durch die Zahl a ausgedrückt wird.

**) Die Endpunkte des Fadens sollen ebenfalls als „Fadenpunkte“ gezählt werden.

$$l-1 \leqq q \leqq l+1$$

benutzen, erhalten wir*)

$$l-3 \leqq t \leqq l+1. \tag{27.}$$

B. Wir wollen uns nun den Faden in $m+1$ gleiche Teile geteilt vorstellen, wobei m eine nicht negative ganze Zahl bedeutet. Die Endpunkte und Teilpunkte wollen wir mit dem gemeinsamen Namen „Knoten" bezeichnen. Es gibt deren im ganzen $m+2$ und der Abstand r zweier aufeinander folgenden Knoten, welchen wir „Sprossenlänge" nennen wollen, ist gleich $\frac{l}{m+1}$. Es gibt (nach der oben angewandten Bezeichnung) t Fadenteile, welche die Strecke AB kontinuierlich bedecken. Die Anzahl der Knoten auf diesen Fadenteilen ist, wie leicht zu sehen, nicht kleiner als $t\left(\frac{s}{r}-1\right)$ und nicht größer als $t\left(\frac{s}{r}+1\right)$. Bezeichnen wir mit z die Gesamtzahl aller auf der Strecke AB gelegenen Knoten, so ergibt sich

$$t\left(\frac{s}{r}-1\right) \leqq z \leqq (t+2)\left(\frac{s}{r}+1\right). \tag{28.}$$

Wir führen nun das Symbol $\overline{\left(\frac{s}{r}-1\right)}$ ein; und zwar bedeute dasselbe für $\frac{s}{r}-1 \geqq 0$ nichts anderes als $\frac{s}{r}-1$, für $\frac{s}{r}-1<0$ sei aber $\overline{\left(\frac{s}{r}-1\right)}=0$**). Mit Benutzung des genannten Zeichens können wir offenbar schreiben

$$t\overline{\left(\frac{s}{r}-1\right)} \leqq z \leqq (t+2)\left(\frac{s}{r}+1\right). \tag{29.}$$

Die Beziehung (29.) folgt nämlich sofort aus (28.), wenn man berücksichtigt, daß $z \geqq 0$ ist. Mit Hilfe von (27.) erhält man weiter

---

*) Bei den Ungleichungen dieser Arbeit legen wir auf die Bestimmung möglichst enger Grenzen keinen Wert.

**) In entsprechender Weise wird im folgenden das Symbol $(\bar{c})$ gebraucht, wobei c irgend eine Größe ist.

$$(l-3)\left(\frac{s}{r}-1\right)\overline{\overline{<}}z\overline{\overline{<}}(l+3)\left(\frac{s}{r}+1\right)$$

und endlich wegen $l=(m+1)r$

$$(30.)\qquad [(m+1)r-3]\left(\frac{s}{r}-1\right)\overline{\overline{<}}z\overline{\overline{<}}[(m+1)r+3]\left(\frac{s}{r}+1\right).$$

Wir stellen uns nun einen neuen Faden vor, der in dieselbe Zahl gleicher Teile zerfällt wie der vorher betrachtete. Die neue Sprossenlänge möge sich aber von der alten um eine ganze Zahl unterscheiden. Wickeln wir den neuen Faden in derselben Richtung auf, wie dies bei dem alten geschah, und gehen wir dabei von demselben Anfangspunkt aus, so nehmen die neuen Knoten dieselben Plätze auf der Peripherie ein wie die alten. Aus dieser Bemerkung folgt, *daß man in der Beziehung* (30.) r *durch irgend eine positive Größe ersetzen darf, die sich von* r *um eine ganze Zahl unterscheidet.*

Wir stellen uns noch einen weiteren Faden vor, der ebenfalls in dieselbe Zahl gleicher Teile zerfällt wie der erste. Die neue Sprossenlänge möge sich jetzt von $-r$ um eine ganze Zahl unterscheiden. Wickeln wir den letztgenannten Faden in einer Richtung auf, welche der beim ersten Faden eingeschlagenen entgegengesetzt ist, und gehen wir dabei von demselben Anfangspunkt aus, so nehmen die neuen Knoten wieder dieselben Plätze auf der Peripherie ein wie die alten. *Wir können daher in der Beziehung* (30.) r *auch durch irgendeine positive Größe ersetzen, die sich von* $-r$ *um eine ganze Zahl unterscheidet.*

C. Indem wir wieder zu den Vorstellungen zurückkehren, welche den Betrachtungen in B. anfangs zugrunde lagen, führen wir zunächst die spezielle Annahme ein, daß die Knotenzahl

$$m+2=\nu\cdot\mu$$

sei, wobei

$$\nu\overline{\overline{>}}2 \quad \text{und} \quad \mu\overline{\overline{>}}1$$

ganze Zahlen bedeuten. Die aufeinander folgenden Knoten des gegebenen Fadens F seien

$$a_{11}, a_{12}, \dots a_{1\mu},\ a_{21}, a_{22}, \dots a_{2\mu}, \dots a_{\nu 1}, a_{\nu 2}, \dots a_{\nu\mu}.$$

Es ist nun offenbar möglich, μ Fäden $F_1, F_2, \dots F_\mu$ mit je ν Knoten und der Sprossenlänge $\mu \cdot r$ so aufzuspannen, daß die Knoten von F_1 mit a_{11}, $a_{21}, \dots a_{\nu 1}$ diejenigen von F_2 mit $a_{12}, a_{22}, \dots a_{\nu 2}$ usw., endlich diejenigen von F_μ mit $a_{1\mu}, a_{2\mu}, \dots a_{\nu\mu}$ zusammenfallen. Indem wir das in (30.) ausgedrückte Resultat (unter Beobachtung der sich daran schließenden Bemerkungen) auf $F_1, F_2, \dots F_\mu$ anwenden, erhalten wir

$$(31.)\quad \mu\,[(\nu-1)\,\varrho-3]\left(\frac{s}{\varrho}-1\right) \leqq z \leqq \mu\,[(\nu-1)\,\varrho+3]\left(\frac{s}{\varrho}+1\right).$$

Hierbei bedeutet z wie vorhin die Anzahl derjenigen Knoten von F, welche auf der Strecke AB liegen; ϱ bedeutet irgend eine positive Größe, die sich von μr oder $-\mu r$ um eine ganze Zahl (die Null eingeschlossen) unterscheidet.

Es möge nun die vorhin eingeführte Annahme

$$m+2 = \nu \cdot \mu$$

durch die neue

$$m+2 = \lambda \cdot \tau + \sigma$$

ersetzt werden, wobei λ, τ, σ ganze Zahlen bedeuten, welche den Bedingungen

$$\lambda \geqq 2,\quad \tau \geqq 1,\quad 0 \leqq \sigma < \tau$$

genügen. **In diesem Fall haben wir, wie leicht bei Benutzung des durch (31.) ausgedrückten Resultats folgt,**

$$(32.)\ \tau\,[(\lambda-1)\,\varkappa-3]\left(\frac{s}{\varkappa}-1\right) \leqq z \leqq \tau\,[(\lambda-1)\,\varkappa+3]\left(\frac{s}{\varkappa}+1\right)+\tau-1.$$

Hierbei bezeichnet $\varkappa$ irgend eine positive Größe, welche sich von $\tau \cdot r$ oder $-\tau \cdot r$ um eine ganze Zahl (die Null eingeschlossen) unterscheidet.

§ 8.

Wie bisher sei $s\,(0<s<1)$ die Länge einer auf einem Kreise mit dem Umfang 1 aufgetragenen Strecke AB. $n\geqq 2$ sei die Knotenzahl eines Fadens mit der Sprossenlänge $r>0$. *Wir setzen r als Irrationalzahl voraus.* s und r denken wir uns als gegebene Konstanten, n als Variable. Auch die Art der Auftragung von AB und der Aufwickelung des Fadens werde als veränderlich angesehen. Die Anzahl derjenigen Knoten, welche bei der Aufwicklung auf der Strecke AB liegen, sei u. Es besteht dann folgender Satz: *Jeder positiven Zahl p entspricht eine solche Zahl S, daß u in der Form*

$$u = n\,(s+\varepsilon) \qquad (|\varepsilon|<p)$$

dargestellt werden kann, sobald $n>S$ gilt.

Um diesen Satz zu beweisen, bestimmen wir zunächst die ganzen Zahlen $a\geqq 1$ und b in der Weise, daß die Größe

$$\omega = |ar+b|$$

der Bedingung

$$0<\omega<\frac{p}{2}$$

genügt*). Wir bestimmen ferner eine solche ganze Zahl $N>2$, daß

$$(33.)\qquad \frac{(2\omega+3)\left(\overline{\frac{s}{\omega}-1}\right)}{N}\leqq\frac{p}{2},\qquad \frac{3\left(\frac{s}{\omega}+1\right)+1}{N}\leqq\frac{p}{2}$$

gilt. Es läßt sich nun zeigen, daß wir den Anforderungen des Satzes genügen, wenn wir $S=N\cdot a$ wählen. Um uns von der Richtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen, setzen wir $n>N\cdot a$ voraus und bezeichnen mit $\left[\frac{n}{a}\right]$ die größte in $\frac{n}{a}$ enthaltene ganze Zahl, so daß also

*) Die genannte Bestimmung ist nach einem bekannten Satz offenbar ausführbar.

$$0 \leqq \frac{n}{a} - \left[\frac{n}{a}\right] < 1$$

gilt. Wir haben dann offenbar

$$\left[\frac{n}{a}\right] \geqq N.$$

Weiter können wir schreiben

$$n = \left[\frac{n}{a}\right] \cdot a + \vartheta,$$

wobei ϑ eine ganze, der Bedingung $0 \leqq \vartheta < a$ genügende Zahl ist. Nun kann das durch (32.) ausgedrückte Resultat Verwendung finden. Dabei spielen jetzt $\left[\frac{n}{a}\right], a, \vartheta$ die Rolle von bezw. λ, τ, σ und an Stelle von $\varkappa$ können wir jetzt ω setzen. Wir erhalten so

$$(34.) \qquad a\left[\left(\left[\frac{n}{a}\right]-1\right)\omega - 3\right]\left(\overline{\frac{s}{\omega}-1}\right) \leqq u <$$
$$a\left[\left(\left[\frac{n}{a}\right]-1\right)\omega + 3\right]\left(\frac{s}{\omega}+1\right) + a - 1.$$

Indem wir berücksichtigen, daß

$$\frac{s}{\omega} - 1 \leqq \left(\overline{\frac{s}{\omega}-1}\right)$$

und daher

$$-ns \geqq -n\omega\left[\left(\overline{\frac{s}{\omega}-1}\right)+1\right]$$

gilt, indem wir ferner die Beziehung

$$0 \geqq -\frac{n}{a} + \left[\frac{n}{a}\right] > -1$$

beachten, erhalten wir leicht auf Grund von (34.)

$$(35.) \quad -a(2\omega+3)\left(\overline{\frac{s}{\omega}-1}\right) - n\omega \leqq u - ns \leqq 3a\left(\frac{s}{\omega}+1\right) + a + n\omega.$$

Wegen der Beziehungen (33.) folgt hieraus

$$(36.) \qquad -Na\frac{p}{2}-n\omega \leqq u-ns \leqq Na\frac{p}{2}+n\omega.$$

Erinnert man sich endlich an die Ungleichungen

$$n>Na \text{ und } 0<\omega<\frac{p}{2},$$

so erhält man

$$-np<u-ns<np$$

und folglich

$$(37.) \qquad -p<\frac{u}{n}-s<p.$$

Setzen wir nun $\frac{u}{n}-s=\varepsilon$, so ist die Richtigkeit unserer Behauptung offenbar.

§ 9.

A. Wir denken uns nun einen *einseitig* unbegrenzten Faden und nehmen auf demselben eine unbegrenzte Zahl von „Knoten“ in der Weise an, daß der erste Knoten mit dem Fadenende zusammenfällt, während die übrigen im Abstande $r>0$ der Reihe nach aufeinander folgen. r heißt ähnlich wie vorher die *Sprossenlänge* des Fadens. Auf einem Kreise vom Umfang 1 nehmen wir wie im vorhergehenden eine Strecke AB von der Länge s $(0<s<1)$ an und wickeln den Faden von irgendeinem Punkte ausgehend auf die Peripherie auf. Die Anzahl derjenigen unter den n ersten Knoten, welche bei der Aufwickelung auf der Strecke AB liegen, bezeichnen wir mit $\varphi(n)$ und nennen dieses $\varphi(n)$ die *Verteilungsfunktion.*

Ist r eine Irrationalzahl, so folgt aus dem in § 8 *bewiesenen Satz unmittelbar*

$$(38.) \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(n)}{n}=s.$$

B. Wir setzen nunmehr r als *rationale* Zahl voraus; es sei $r=\frac{\mu}{\nu}$, wobei μ, ν positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler bedeuten. In

diesem Fall teilen wir die Peripherie durch ν Punkte in ν gleiche Teile, und zwar in der Weise, daß ein Teilpunkt mit dem Anfangspunkt des Fadens zusammenfällt. Das System der ν Teilpunkte möge mit Σ bezeichnet werden. Offenbar fallen bei der Aufwickelung des Fadens die ν ersten Knoten mit Σ zusammen; dasselbe gilt von den ν darauf folgenden Knoten usw. Die Anzahl derjenigen Teilpunkte des Systems Σ, welche auf der Strecke AB liegen, bezeichnen wir mit λ. Offenbar ist $\lambda \leqq \nu$.

Es sei nun n irgend eine positive ganze Zahl. Wir stellen dieselbe in der Form

$$n = p \cdot \nu + \varrho$$

dar, wobei p und ϱ ganze Zahlen sind, welche den Bedingungen

$$p \geqq 0, \quad 0 \leqq \varrho < \nu$$

genügen. Bezeichnet man noch

$$\varphi(n) - p \cdot \lambda = \sigma,$$

so gilt, wie leicht zu sehen,

$$0 \leqq \sigma \leqq \varrho, \quad \sigma \leqq \lambda, \quad \nu - \varrho \geqq \lambda - \sigma. \tag{39.}$$

Wir erhalten nun

$$\varphi(n) = \frac{n-\varrho}{\nu} \cdot \lambda + \sigma = n \cdot \frac{\lambda}{\nu} + \sigma - \frac{\varrho\lambda}{\nu}. \tag{40.}$$

Auf Grund von (39.) ergibt sich

$$\sigma - \frac{\lambda\varrho}{\nu} \leqq \sigma - \frac{\lambda\sigma}{\nu} \leqq \frac{\lambda(\nu-\lambda)}{\nu},$$

$$\sigma - \frac{\lambda\varrho}{\nu} \geqq \sigma + \frac{\lambda}{\nu}(\lambda - \sigma - \nu) = (\sigma - \lambda)\left(1 - \frac{\lambda}{\nu}\right) \geqq -\frac{\lambda(\nu-\lambda)}{\nu}$$

und folglich

$$\left|\sigma - \frac{\lambda\varrho}{\nu}\right| \leqq \frac{\lambda(\nu-\lambda)}{\nu}. \tag{41.}$$

Aus (40.) und (41.) erhalten wir

$$(42.)\quad \varphi(n) = n\cdot\frac{\lambda}{\nu} + \text{einer Größe, deren Absolutwert} \leqq \frac{\lambda(\nu-\lambda)}{\nu}.$$

Dieses Resultat gilt, wie gesagt, für den Fall, daß die Sprossenlänge durch eine rationale Zahl ausgedrückt wird.

C. In jedem Fall, mag r rational oder irrational sein, strebt der Quotient $\frac{\varphi(n)}{n}$ mit unbegrenzt wachsendem n nach einer bestimmten endlichen Grenze; diese letztere wollen wir *die charakteristische Zahl* der Verteilungsfunktion nennen. Ist r irrational, so ist die charakteristische Zahl gleich der Länge der Strecke AB. Ist r rational, so ist die charakteristische Zahl gleich $\frac{\lambda}{\nu}$, wobei wir hinsichtlich der Bedeutung von λ und ν auf das vohergehende verweisen. *Gibt es eine solche Konstante c, daß die Differenz $\varphi(n)-c\cdot n$ für unbeschränkt wachsende n zwischen endlichen Grenzen bleibt, so sagen wir: Die Verteilungsfunktion besitzt einen linearen Charakter.* Offenbar ist dann c die charakteristische Zahl von $\varphi(n)$. Im Falle einer *rationalen* Sprossenlänge besitzt nach dem obigen die Verteilungsfunktion stets einen linearen Charakter. Daß aber der Verteilungsfunktion nicht etwa *immer* ein linearer Charakter zukommt, werden wir bald sehen.

§ 10.

Zunächst sprechen wir folgenden Satz aus: *Es möge ein Kreis vom Umfange* 1 *vorliegen, auf dem eine Strecke AB von der Länge s $(0<s<1)$ abgetragen sei. Von einem Punkte P der Peripherie aus sei ein einseitig unbegrenzter und wie im vorhergehenden mit Knoten versehener Faden von der Sprossenlänge r aufgewickelt. Die Antwort auf die Frage, ob der Verteilungsfunktion ein linearer Charakter zukommt oder nicht, hängt dann bloß von den Größen s und r ab, nicht aber von der Lage der Strecke AB und des Punktes P sowie der Wahl der Richtung für die Aufwickelung des Fadens.*

Es ist leicht zu sehen, daß der Beweis dieses Satzes sich auf die Begründung folgender Behauptung reduzieren läßt: *Es möge ein Kreis vom Umfange* 1 *vorliegen, auf dem eine Strecke AB von der Länge s $(0<s<1)$*

abgetragen sei. Wir wickeln einen einseitig unbegrenzten, wie vorher mit Knoten versehenen Faden von der Sprossenlänge r auf, indem wir einmal von einem Peripheriepunkt P, sodann von einem Peripheriepunkt Q ausgehen und in beiden Fällen bei der Aufwickelung dieselbe Richtung einschlagen. Hat bei der Wahl des Punktes P als Anfangspunkt die Verteilungsfunktion linearen Charakter, so gilt dasselbe bei der Wahl des Punktes Q. **Wir haben somit nur diese letztere Behauptung zu erledigen,** *wobei es offenbar genügt, r als Irrationalzahl vorauszusetzen.*

Wir bezeichnen die Verteilungsfunktion, welche der Wahl des Punktes P als Anfangspunkt entspricht, mit $\varphi_P(n)$, die Verteilungsfunktion, welche der Wahl von Q entspricht, mit $\varphi_Q(n)$. Um unsere Behauptung zu beweisen, nehmen wir an, daß $\varphi_P(n)$ linearen Charakter besitze. Es gibt daher eine solche positive Zahl e, daß

$$(43.) \qquad -e \leqq \varphi_P(n) - s \cdot n \leqq e$$

gilt. *Man kann zeigen, daß dann für alle* $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$(44.) \qquad -2-2e \leqq \varphi_Q(n) - s \cdot n \leqq 2+2e$$

gelten muß. **Gelingt es uns, diese letzte Behauptung zu beweisen, so ist damit unser Satz erledigt.**

Wir bemerken zunächst, daß niemals mehr als zwei Knoten des Fadens mit den Endpunkten der Strecke AB zusammenfallen können; dies folgt aus der Irrationalität von r. Wählt man daher eine positive ganze Zahl n' fest aus, so kann der Peripheriepunkt Q mit einer solchen auf der Peripherie gelegenen Umgebung U versehen werden, daß

$$(45.) \qquad 0 \leqq \varphi_R(n') - \varphi_Q(n') \leqq 2$$

gilt, sobald der Peripheriepunkt R der Umgebung U angehört. Die Bezeichnung $\varphi_R(n)$ ist dabei analog $\varphi_P(n)$, $\varphi_Q(n)$ gewählt.

Nach dieser Bemerkung gehen wir zum Beweise der in (44.) zum Ausdruck kommenden Behauptung über. Zu diesem Zweck nehmen wir versuchsweise an, es sei

$$|\varphi_Q(n_1) - s\cdot n_1| > 2+2e, \tag{46.}$$

wobei n_1 eine gewisse positive ganze Zahl bedeutet. Wir bestimmen dann eine Umgebung V des Punktes Q, welche bezüglich n_1 dieselbe Rolle spielt, wie vorhin U bezüglich n'. Da r eine Irrationalzahl ist, so liegt sicher ein Knoten des Fadens mit dem Anfangspunkt P in der Umgebung V*). Es sei dies für den n_0-ten Knoten der Fall und der von ihm eingenommene Peripheriepunkt sei T. Dann haben wir nach (45.)

$$|\varphi_T(n_1) - \varphi_Q(n_1)| \leqq 2 \tag{47.}$$

und mit Rücksicht auf (46.)

$$\begin{cases} |\varphi_T(n_1) - s\cdot n_1| = |(\varphi_T(n_1) - \varphi_Q(n_1)) + (\varphi_Q(n_1) - s\cdot n_1)| \\ \geqq |\varphi_Q(n_1) - s\cdot n_1| - |\varphi_T(n_1) - \varphi_Q(n_1)| > 2+2e-2 = 2e. \end{cases} \tag{48.}$$

Nun haben wir aber offenbar

$$\varphi_T(n_1) = \varphi_P(n_1+n_0-1) - \varphi_P(n_0-1), \tag{49.}$$

wobei im Falle $n_0=1$ statt $\varphi_P(n_0-1)$ die Größe 0 zu setzen ist. Aus (43.) schließt man aber

$$|\varphi_P(n_1+n_0-1) - \varphi_P(n_0-1) - s\cdot n_1| \leqq 2e, \tag{50.}$$

und mit Rücksicht auf (49.)

$$|\varphi_T(n_1) - s\cdot n_1| \leqq 2e, \tag{51.}$$

*) Dies ergibt sich leicht mit Hilfe eines Satzes, welchen *Tschebyschef* in seiner Abhandlung „Sur une question arithmétique“ mitgeteilt hat. S. Oeuvres de *P. L. Tschebyschef* St.-Pétersbourg 1899 Tome I p. 679. Die genannte Abhandlung erschien zuerst in russischer Sprache.

was (48.) direkt widerspricht. Damit ist die versuchsweise eingeführte Annahme (46.) als unzulässig erkannt und unsere in (44.) zum Ausdruck kommende Behauptung erwiesen.

§ 11.

Wir kommen nun zu dem Theorem, welches den Abschluß dieses Kapitels bilden soll. Es möge ein Kreis vom Umfang 1 vorliegen. Ferner seien positive Größen s und $\mathfrak{r}$ fest gegeben, wobei die erste der Bedingung $0<s<1$ genügt. Tragen wir eine Strecke von der Länge s auf der Peripherie ab und wickeln wir ebendaselbst einen einseitig unbegrenzten, wie im vorhergehenden mit Knoten versehenen Faden auf, so hängt nach § 10 die Entscheidung der Frage, ob die Verteilungsfunktion linearen Charakter hat oder nicht, nur von der Wahl der Sprossenlänge ab. *Man kann diese Sprossenlänge r so wählen, daß der Unterschied von r und $\mathfrak{r}$ absolut beliebig klein wird und eine Verteilungsfunktion von linearem Charakter sich ergibt. Man kann aber auch andrerseits die Sprossenlänge so bestimmen, daß $|r-\mathfrak{r}|$ beliebig klein wird und die Verteilungsfunktion einen linearen Charakter nicht besitzt.*

Der erste Teil der Behauptung wird erledigt durch den Hinweis darauf, daß man in beliebiger Nähe von $\mathfrak{r}$ rationale Zahlen angeben kann. Es handelt sich daher nur noch um den Beweis des zweiten Teiles der Behauptung.

A. Auf einem Kreise vom Umfang 1 tragen wir eine Strecke AB von der Länge s ab; den Mittelpunkt dieser Strecke bezeichnen wir mit P. Von P aus wickeln wir einen einseitig unbegrenzten Faden $F_{(r)}$ von der (vorläufig noch nicht fixierten) Sprossenlänge r in einer fest gewählten Richtung auf. Die sich hierbei ergebende Verteilungsfunktion bezeichnen wir mit $\varphi^{(r)}(n)$.

L, p, q seien Größen, welche den Bedingungen

$$0<p<q, \quad L>0$$

entsprechen, sonst aber willkürlich gewählt sind. Wir bestimmen die positive ganze Zahl N in der Weise, daß erstens

$$N > \frac{1}{q-p}$$

gilt und zweitens N kein ganzes Vielfaches von $\frac{1}{s}$ darstellt. Eine solche Wahl von N ist möglich, da s keine ganze Zahl ist. Es gibt dann offenbar eine solche positive ganze Zahl M, daß

$$p < \frac{M}{N} < q$$

gilt. Indem wir mit t den größten gemeinsamen Teiler von M und N bezeichnen, setzen wir

$$M = t \cdot \varkappa, \quad N = t \cdot \tau$$

und haben

$$p < \frac{\varkappa}{\tau} < q.$$

Es bedeuten hiernach $\varkappa$ und τ positive ganze Zahlen, welche prim zueinander sind.

B. Es sei nun zunächst $r = \frac{\varkappa}{\tau}$. Um die Plätze zu bestimmen, welche die Knoten von $F_{\left(\frac{\varkappa}{\tau}\right)}$ auf der Peripherie einnehmen, haben wir nach dem vorhergehenden (s. § 9B) die Peripherie vom Punkte P aus in τ gleiche Teile zu teilen. Die Teilpunkte (mit Einschluß von P) geben dann, wie wir wissen, die gesuchten Plätze an. Man erkennt nun, daß kein Teilpunkt mit A oder B zusammenfallen kann. Andernfalls wäre nämlich $\frac{s}{2}$ ein ganzes Vielfaches von $\frac{1}{\tau}$ und folglich τ sowie auch N ein ganzes Vielfaches von $\frac{1}{s}$, was dem vorhergehenden widerspricht. Die Anzahl derjenigen Teilpunkte, welche auf der Strecke AB liegen, bezeichnen wir mit σ. Es ist also σ eine ganze Zahl, welche der Bedingung $0 \leqq \sigma \leqq \tau$ genügt. Da τ kein ganzes Vielfaches von $\frac{1}{s}$ ist, so kann *nicht* $\frac{\sigma}{\tau} = s$ gelten. Auf Grund

des vorhergehenden (s. § 9B) haben wir

$$(52.) \quad \varphi^{\left(\frac{\varkappa}{\tau}\right)}(n) = n \cdot \frac{\sigma}{\tau} + \text{einer Größe, deren Absolutwert} \leqq \frac{\sigma(\tau-\sigma)}{\tau}.$$

Nunmehr bestimmen wir eine positive ganze Zahl $\mathfrak{N}$ in der Weise daß

$$(53.) \qquad \mathfrak{N} \cdot \left| s - \frac{\sigma}{\tau} \right| > 2L + \frac{\sigma(\tau-\sigma)}{\tau}$$

gilt. Da, wie eben erwähnt, s und $\frac{\sigma}{\tau}$ voneinander verschieden sind, ist die genannte Bestimmung möglich. Hierauf wählen wir eine Größe ε, die außer der Bedingung

$$0 < \varepsilon < \frac{\varkappa}{\tau} - p$$

noch folgenden Bedingungen genügt.

α) Sobald die Sprossenlänge r sich von $\frac{\varkappa}{\tau}$ um weniger als ε unterscheidet, gilt

$$\varphi^{(r)}(\mathfrak{N}) = \varphi^{\left(\frac{\varkappa}{\tau}\right)}(\mathfrak{N}).$$

β) Sobald die Sprossenlänge r durch eine *rationale* Zahl $\frac{\mu}{\nu}$ (μ, ν ganze positive Zahlen) ausgedrückt wird, welche sich von $\frac{\varkappa}{\tau}$ um weniger als ε unterscheidet, ohne jedoch gleich $\frac{\varkappa}{\tau}$ zu sein, ist der Nenner $\nu > \frac{\mathfrak{N}}{L}$.

Was die Möglichkeit einer solchen Wahl von ε betrifft, so genügt es wohl, den Punkt α) zu erläutern. Zu diesem Zweck erinnern wir zunächst daran, daß keiner der oben erwähnten τ Teilpunkte (s. den Anfang von § 11 B) mit A oder B zusammenfällt. Wenn daher die Sprossenlänge r sich genügend wenig von $\frac{\varkappa}{\tau}$ unterscheidet, so liegen die $\mathfrak{N}$ ersten Knoten von $F_{(r)}$ auf der Strecke AB oder nicht, je nachdem dies für die entsprechenden Knoten von $F_{\left(\frac{\varkappa}{\tau}\right)}$ der Fall ist oder nicht.

C. *Wir behaupten, daß für alle r des Intervalls*

$$\frac{\varkappa}{\tau} - \varepsilon < r < \frac{\varkappa}{\tau}$$

die Ungleichung

$$\left|\varphi^{(r)}(\mathfrak{N}) - \mathfrak{N} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi^{(r)}(n)}{n}\right| > L \tag{54.}$$

gilt.

Um diese Behauptung zu begründen, setzen wir

$$\varphi^{(r)}(\mathfrak{N}) - \mathfrak{N} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi^{(r)}(n)}{n} = J, \quad \varphi^{\left(\frac{\varkappa}{\tau}\right)}(\mathfrak{N}) - \mathfrak{N} \cdot \frac{\sigma}{\tau} = P \tag{55.}$$

und haben nach (52.)

$$|P| \leqq \frac{\sigma(\tau - \sigma)}{\tau}. \tag{56.}$$

Nach § 11B α) gilt

$$\varphi^{(r)}(\mathfrak{N}) = \varphi^{\left(\frac{\varkappa}{\tau}\right)}(\mathfrak{N}).$$

Wir können daher schreiben

$$J = \mathfrak{N}\left(\frac{\sigma}{\tau} - \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi^{(r)}(n)}{n}\right) + P. \tag{57.}$$

Nunmehr betrachten wir die Möglichkeiten „r irrational“ und „r rational“ getrennt.

1. *r sei irrational.* **Dann gilt**

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varphi^{(r)}(n)}{n} = s.$$

Wir haben also

$$J = \mathfrak{R}\left(\frac{\sigma}{\tau} - s\right) + P$$

und folglich

$$|J| \geqq \mathfrak{R}\left|\frac{\sigma}{\tau} - s\right| - |P|. \tag{58.}$$

Mit Rücksicht auf (53.) und (56.) ergibt sich

$$|J| > 2L + \frac{\sigma(\tau - \sigma)}{\tau} - \frac{\sigma(\tau - \sigma)}{\tau} = 2L, \tag{59.}$$

so daß die durch (54.) ausgedrückte Behauptung für den Fall „r irrational“ begründet ist.

2. *r sei rational.* Es sei $r = \frac{a}{b}$, wobei a, b positive ganze Zahlen bedeuten, welche prim zueinander sind. Teilen wir die Kreisperipherie vom Punkte P aus in b gleiche Teile, so mögen k Teilpunkte auf der Strecke AB liegen. Es gilt nunmehr

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\varphi^{(r)}(n)}{n} = \frac{k}{b},$$

so daß wir schreiben können

$$J = \mathfrak{R}\left(\frac{\sigma}{\tau} - \frac{k}{b}\right) + P = \mathfrak{R}\left(\frac{\sigma}{\tau} - s\right) + \mathfrak{R}\left(s - \frac{k}{b}\right) + P. \tag{60.}$$

Nun haben wir aber offenbar

$$\frac{k-1}{b} \leqq s \leqq \frac{k+1}{b}$$

und daher

$$\left|s - \frac{k}{b}\right| \leqq \frac{1}{b}. \tag{61.}$$

Aus (60.), (53.), (61.), (56.) folgt

$$|J| > 2L + \frac{\sigma(\tau-\sigma)}{\tau} - \frac{\mathfrak{N}}{b} - \frac{\sigma(\tau-\sigma)}{\tau}. \tag{62.}$$

Nach § 11B, β) gilt aber $b > \frac{\mathfrak{N}}{L}$ und folglich $L > \frac{\mathfrak{N}}{b}$. Mit Rücksicht auf diese Ungleichung erhält man aus (62.)

$$|J| > 2L - L = L.$$

Damit ist die Behauptung (54.) auch für den Fall „r rational“ begründet.

D. Wir haben uns davon überzeugt, daß eine positive ganze Zahl $\mathfrak{N}$ und zwei zwischen den Zahlen p und q gelegene voneinander verschiedene Zahlen

$$\beta = \frac{\varkappa}{\tau} \text{ und } \alpha = \frac{\varkappa}{\tau} - \varepsilon$$

in der Weise angebbar sind, daß unter der Bedingung $\alpha < r < \beta$

$$\left|\varphi^{(r)}(\mathfrak{N}) - \mathfrak{N} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi^{(r)}(n)}{n}\right| > L$$

gilt. Gestützt auf dieses Ergebnis ist es nun leicht, den Beweis unseres Satzes zu führen. Wir nehmen zu diesem Zwecke zwei beliebige voneinander verschiedene positive Zahlen an; g sei die kleinere, h die größere von ihnen. Hierauf wählen wir die positiven Zahlen

$$L_1, L_2, L_3, \ldots$$

in der Weise, daß sie nach ∞ konvergieren. Sodann bestimmen wir die Größen

$$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \ldots$$

und die positiven ganzen Zahlen

$$\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_3, \ldots$$

in der Weise, daß erstens die Bedingungen

$$g < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3, \ldots, \quad h > \beta_1 > \beta_2 > \beta_3, \ldots,$$
$$\beta_1 > \alpha_1, \quad \beta_2 > \alpha_2, \quad \beta_3 > \alpha_3, \ldots$$

erfüllt sind und zweitens unter der Bedingung $\alpha_\nu < r < \beta_\nu$

$$\left| \varphi^{(r)}(\mathfrak{N}_\nu) - \mathfrak{N}_\nu \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi^{(r)}(n)}{n} \right| > L_\nu$$

gilt, wobei ν **irgend eine der Zahlen 1, 2, 3, ... bedeuten kann. Daß eine solche Bestimmung möglich ist, erkennen wir auf Grund des eben formulierten Ergebnisses. Offenbar existiert eine Zahl** ϱ**, welche den Bedingungen**

$$\alpha_\nu < \varrho < \beta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

genügt. Nach dem vorhergehenden haben wir für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$\left| \varphi^{(\varrho)}(\mathfrak{N}_\nu) - \mathfrak{N}_\nu \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi^{(\varrho)}(n)}{n} \right| > L_\nu;$$

es ist demnach klar, daß

$$\varphi^{(\varrho)}(m) - m \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi^{(\varrho)}(n)}{n}$$

nicht für alle $m = 1, 2, 3, \ldots$ **zwischen endlichen Grenzen bleiben kann.** $\varphi^{(\varrho)}(n)$ *kommt daher ein linearer Charakter nicht zu.* **Bemerken wir noch, daß** ϱ **zwischen** g **und** h **liegt, und erinnern wir uns daran, daß** g, h **ein willkürlich gewähltes Paar voneinander verschiedener positiver Größen darstellen, so erkennen wir sofort die Richtigkeit der in Rede stehenden Behauptung.**

III. *Der Fall dreier Planeten.*

§ 12.

Es mögen drei positive Zahlen A, B, C gegeben sein. Dieselben sollen der Bedingung genügen, daß jede von ihnen kleiner ist als

$$\frac{1}{2}(A+B+C).$$

Aus drei Strecken von den Längen*) A, B, C kann hiernach ein „eigentliches“ Dreieck hergestellt werden. Die Winkel, welche in diesem Dreieck den Seiten B und C gegenüberliegen, mögen durch die Zahlen β und γ ausgedrückt werden. Wir führen nun zwei Funktionen X, Y der unbeschränkt veränderlichen Variablen x, y durch die Gleichungen

$$(63.) \qquad \begin{cases} X = A + B\cos x + C\cos y, \\ Y = \quad B\sin x + C\sin y \end{cases}$$

ein. Unsere nächste Aufgabe besteht darin, die „kritischen“ Wertepaare x, y zu finden, worunter wir diejenigen Wertepaare x, y verstehen, für welche $X = Y = 0$ gilt. Eine einfache Betrachtung, deren ausführliche Darstellung unnötig sein dürfte, zeigt, daß diese kritischen Wertepaare durch die Gleichungen

$$(64.) \qquad \begin{cases} x = \pm(\pi-\gamma)+\mu\cdot 2\pi \\ y = \mp(\pi-\beta)+\nu\cdot 2\pi \end{cases}$$

gegeben sind. Hierbei bedeuten μ, ν irgendwelche ganze Zahlen, zu denen auch die Null gerechnet wird, und sind in beiden Gleichungen gleichzeitig die oberen oder gleichzeitig die unteren Zeichen zu nehmen.

Wir führen nun ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt O ein. Zu beiden Seiten der Achsen ziehen wir zu denselben Parallelen, welche aufeinander im Abstande π folgen. Mit P, Q, R mögen drei

*) Wir denken uns eine Längeneinheit fest gewählt.

Punkte bezeichnet werden, deren Lage durch die Fig. 3 genügend gekennzeichnet ist. Wir markieren hierauf in der Figur die „kritischen" Punkte d. h. die Punkte, deren Koordinaten kritische Wertepaare x, y darstellen. Zu diesen kritischen Punkten gehört der Punkt G mit den Koordinaten $(\pi-\gamma)$ und $-(\pi-\beta)$ sowie der Punkt H mit den Koordinaten $(\pi+\gamma)$ und $-(\pi+\beta)$. Da $\beta+\gamma<\pi$ gilt, so liegt, wie leicht zu sehen, der Punkt G innerhalb des Dreiecks PRQ. Der Punkt H wird erhalten, indem man durch G und Q eine Gerade zieht und auf dieser Geraden den Punkt H so annimmt, daß $QG=QH$ wird und G und H nicht zusammenfallen. Die übrigen kritischen Punkte ergeben sich, wenn die Koordinaten von G oder H um ganze Vielfache von 2π geändert werden. Diejenigen Punkte, welche auf diese Weise mit Hilfe von G entstehen, sollen kritische Punkte erster Klasse heißen; diejenigen dagegen, welche auf die genannte Weise mit Hilfe von H entstehen, sollen kritische Punkte zweiter Klasse genannt werden. G selbst wird zur ersten, H zur zweiten Klasse gerechnet. In der Fig. 3 sind die Punkte erster Klasse mit $\times$, diejenigen zweiter Klasse mit $\bigcirc$ bezeichnet. Die Punkte G und H verbinden wir durch eine Gerade. Dasselbe geschehe paarweise mit den übrigen kritischen Punkten, wobei die Art der Ausführung durch Fig. 3 mit genügender Deutlichkeit gekennzeichnet ist.

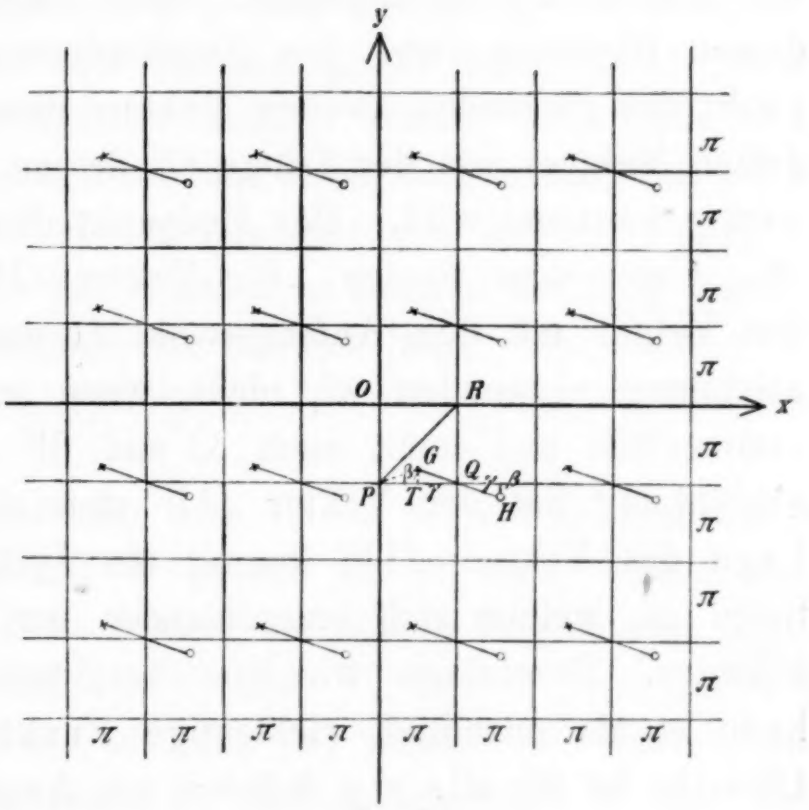

Fig. 3.

§ 13.

A. Außer dem im vorigen Paragraphen eingeführten Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt O benutzen wir noch ein zweites rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt mit Ω bezeichnet werden

möge. Jedem auf der Ebene des ersten Systems gelegenen Punkte w mit den Koordinaten*) x, y bezüglich des ersten Systems ordnen wir einen auf der Ebene des zweiten Systems gelegenen Punkt W mit den Koordinaten X, Y bezüglich des zweiten Systems zu, wobei zwischen x, y einerseits und X, Y andererseits die Beziehungen (63.) bestehen. Der Punkt W wird in folgender Weise erhalten. Wir ziehen zunächst auf der Ebene des zweiten Koordinatensystems einen Vektor von der Länge A, dessen Anfangspunkt mit Ω zusammenfällt und dessen Richtung mit derjenigen der positiven Abszissenachse übereinstimmt. Den Endpunkt dieses Vektors nehmen wir hierauf als Anfangspunkt eines zweiten Vektors von der Länge B, dessen Richtung durch den Amplitudenwert x bestimmt wird. Der Endpunkt des genannten zweiten Vektors dient endlich als Anfangspunkt eines dritten Vektors von der Länge C, dessen Richtung durch den Amplitudenwert y bestimmt wird. Der Endpunkt dieses dritten Vektors ist der Punkt W. Unter dem Namen „der Vektor ΩW“ verstehen wir im folgenden den Vektor mit dem Anfangspunkt Ω und dem Endpunkt W. Diese Bezeichnung verwenden wir nicht, wenn w mit einem kritischen Punkt zusammenfällt und somit auch Ω und W zusammenfallen. Bei dieser Beschränkung hat der Vektor ΩW stets eine bestimmte Richtung. Jeder Lage des Vektors ΩW kommt ein System von unendlich vielen Amplituden zu, welche sich untereinander um ganze Vielfache von 2π unterscheiden. Bezeichnen wir eine Amplitude von ΩW allgemein mit ψ, so kann ψ als unendlich vieldeutige Funktion von x, y aufgefaßt werden. Dieselbe ist für alle x, y definiert mit Ausnahme der kritischen Wertepaare x, y. Ist ψ_0 ein ψ-Wert, welcher $x = x_0$, $y = y_0$ entspricht, so erhält man alle zu $x = x_0$, $y = y_0$ gehörenden ψ-Werte, indem man zu ψ_0 alle denkbaren ganzzahligen Vielfachen von 2π hinzufügt.

B. Der Punkt w möge von einer Anfangslage ausgehend unter Ausführung einer stetigen Bewegung in eine Endlage übergehen, ohne dabei jemals mit einem kritischen Punkt zu koinzidieren. Der Anfangslage von w entsprechen unendlich viele ψ-Werte, von denen wir einen ψ_0 auswählen. Es ist möglich, dem Punkte w während seiner Bewegung solche entsprechenden ψ-Werte zuzuordnen, daß ψ sich bei der genannten Bewegung

---

*) Wir unterscheiden bei beiden Systemen eine Abszissen- und eine Ordinatenachse und nennen bei Angabe der Koordinaten die Abszisse zuerst.

stetig ändert und im Anfangsmoment den Wert ψ_0 annimmt. Diese Zuordnung ist durch die erwähnten Bedingungen eindeutig bestimmt. *Hätten wir an Stelle von ψ_0 einen anderen der Anfangslage von w entsprechenden ψ-Wert gewählt, so wäre doch die Gesamtänderung, welche ψ bei der beschriebenen Bewegung von w erleidet, dieselbe geblieben**). Die Richtigkeit aller dieser Bemerkungen folgt leicht aus der Definition der ψ-Funktion.

Auf der w-Ebene (d. h. der Ebene der Fig. 3) sei ein zusammenhängendes Flächenstück F gegeben, welches durch eine endliche Anzahl getrennt liegender geschlossener Kurven begrenzt werde. Keine dieser Kurven soll mehrfache Punkte besitzen, d. h. jede von ihnen soll so durchlaufen werden können, daß man zum Ausgangspunkt zurückkehrt, ohne sonst eine Stelle zweimal zu berühren. Endlich setzen wir voraus, daß weder innerhalb des Flächenstückes noch auf seiner Begrenzung kritische Punkte vorhanden sind. Wir stellen uns nunmehr vor, daß der Punkt w die Begrenzungskurven, und zwar jede einmal, in solcher Richtung durchläuft, daß das genannte Flächenstück zur Linken liegt. *Die Summe Ψ der Änderungen***), *die ψ hierbei erfährt, ist, wie wir sogleich beweisen werden, gleich Null.*

Zunächst bemerken wir, daß man eine Größe $\mathfrak{R} > 0$ so bestimmen kann, daß die Länge des Vektors ΩW größer als $\mathfrak{R}$ wird, sobald der Punkt w innerhalb des Flächenstücks F oder auf dessen Begrenzung liegt. Ferner gibt es eine solche Größe $e > 0$, daß W_1 und W_2 weniger als um $\mathfrak{R}$ voneinander abstehen, wenn w_1 und w_2 weniger als um e voneinander entfernt sind; hierbei bedeuten w_1 und w_2 innerhalb F oder auf dessen Begrenzung gelegene Punkte, während W_1 und W_2 die entsprechenden W-Punkte sind. Wir zerschneiden nun F derart in eine endliche Zahl von Stücken, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Jedes Stück wird von *einer* geschlossenen Kurve ohne mehrfache Punkte begrenzt.

2. Die Entfernung zweier einem Stück oder seiner Begrenzung angehörigen Punkte ist kleiner als e.

---

*) Die genannte Änderung von ψ ist offenbar auch von dem Bewegungsgesetz unabhängig, nach welchem w seine als gegeben betrachtete Bahn durchläuft. Entsprechendes gilt für die im folgenden vorkommenden analogen Fälle.

**) Wir stellen uns hier und im folgenden stets vor, daß sich ψ stetig ändert, während w eine stetige Bewegung ausführt.

Offenbar ist nun Ψ gleich der Summe der Änderungen, welche ψ erfährt, wenn man die Begrenzungen der Stücke je einmal in einer solchen Richtung durchläuft, daß diese Stücke zur Linken liegen. Durchläuft nun aber w in der genannten Weise die Umgrenzung eines Stückes, so ist hierbei nach dem obigen die Länge des Vektors ΩW stets größer als $\Re$; ferner stehen zwei hierbei eingenommene Positionen von W weniger als $\Re$ voneinander ab. Hat daher w die Begrenzung eines Stückes in der beschriebenen Weise durchlaufen, so muß ψ zum Anfangswert zurückgekehrt sein und hat somit schließlich keine Änderung erlitten. Aus dem Gesagten folgt sofort $\Psi = 0$; q e. d.

C. Wir wollen uns nunmehr vorstellen, daß der Punkt w die Peripherie des Quadrats $OPQR$ (siehe Fig. 3) einmal durchläuft, und zwar von O ausgehend über PQR nach O zurück. Um die Änderung zu finden, welche ψ hierbei erleidet, ist es nützlich, sich an die Konstruktion von W zu erinnern, welche in § 13 A erwähnt wurde. Beachtet man nämlich noch die in § 12 vorausgesetzten Ungleichungen

$$A, B, C < \frac{1}{2}(A+B+C),$$

so ist es leicht, die vom Punkte W durchlaufene Bahn, soweit dies hier wünschenswert ist, festzustellen. Dieselbe besteht aus vier Halbkreisen, deren Enden alle auf der X-Achse liegen. Während w sich von O nach P bewegt, geht W auf einem Halbkreise vom Punkte $(A+B+C, 0)$ zum Punkte $(A+B-C, 0)$*) auf der positiven X-Achse. Der genannte Halbkreis liegt von der X-Achse aus auf der Seite der negativen Y-Achse. Bei dem beschriebenen Übergang von W erleidet ψ offenbar schließlich keine Änderung. Bewegt sich w weiter von P nach Q, so geht W auf einem Halbkreise vom Punkte $(A+B-C, 0)$ zum Punkte $(A-B-C, 0)$ auf der negativen X-Achse; der Halbkreis liegt dabei auf der Seite der positiven Y-Achse. ψ nimmt während dieses Teiles der Bewegung um π zu. Bewegt sich w weiter von Q nach R, so geht W auf einem Halbkreise vom Punkte $(A-B-C, 0)$ zum Punkte $(A+C-B, 0)$ auf der positiven X-Achse; der Halbkreis liegt auf der Seite der negativen Y-Achse. ψ nimmt dabei um π zu. Bewegt sich w endlich von R nach O, so geht W auf einem Halbkreise vom Punkte $(A+C-B, 0)$ zum Punkte $(A+B+C, 0)$; der Halbkreis liegt

*) Die in Klammern stehenden Größen geben die Koordinaten X, Y an.

auf der Seite der positiven Y-Achse. ψ erleidet bei diesem letzten Teile der Bewegung schließlich keine Änderung. *Wir kommen also zu dem Resultat, daß ψ um 2π wächst, wenn w die Peripherie des Quadrats $OPQR$ in der oben beschriebenen Weise durchläuft.* Fig. 4 mag die eben besprochene Bahn von W in einem speziellen Fall veranschaulichen.

Indem wir die vorher in diesem Paragraphen gewonnenen Ergebnisse benutzen, können wir sagen: *Umkreist der Punkt w einmal in positiver Richtung*) den Punkt G, ohne dabei einen anderen kritischen Punkt zu berühren oder zu umkreisen, so nimmt ψ um 2π zu.* Beachten wir noch, daß zwei Positionen von w, deren Koordinaten sich um Vielfache von 2π unterscheiden, ein und derselbe W-Punkt entspricht, so erkennen wir, daß *die Aussage, welche wir soeben bezüglich G gemacht haben, für alle kritischen Punkte erster Klasse Geltung hat.*

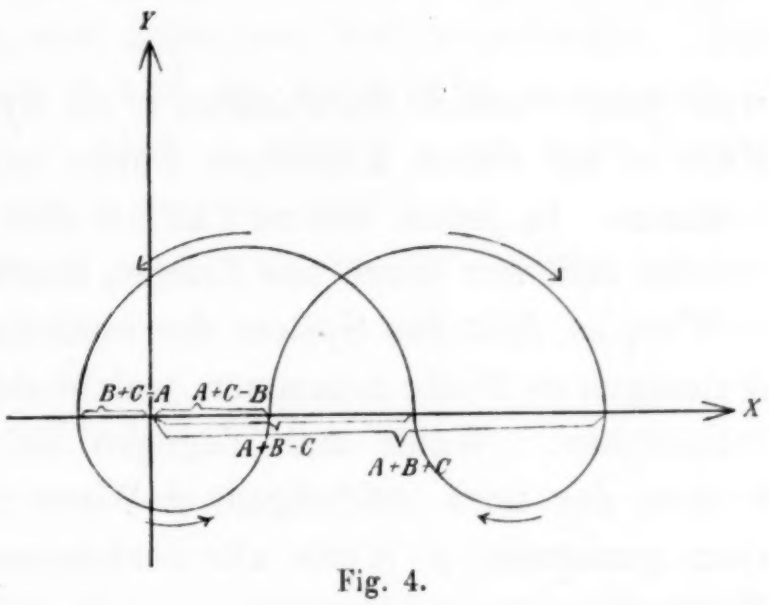

Fig. 4.

In entsprechender Weise wird folgender Satz bewiesen: *Umkreist der Punkt w einmal in positiver Richtung einen kritischen Punkt zweiter Klasse, ohne dabei einen anderen kritischen Punkt zu berühren oder zu umkreisen, so nimmt ψ um 2π ab.*

D. Wir fügen noch eine Bemerkung hinzu, welche für das folgende von Nutzen ist.

Der Punkt w möge sich, ohne mit einem kritischen Punkt zusammenzutreffen, parallel einer der beiden Koordinatenachsen um ein Stück fortbewegen, welches nicht länger als $\frac{\pi}{4}$ ist. *ψ ändert sich hierbei um eine Größe, deren Absolutwert kleiner als $\frac{5\pi}{4}$ ist.* Um die Richtigkeit dieser Bemerkung einzusehen, beobachte man, daß W bei der genannten Bewegung von w einen Teil einer Kreisperipherie beschreibt, und zwar nicht mehr als den achten Teil einer solchen. Dabei fällt W niemals mit Ω zusammen.

---

*) Die „positive“ Richtung soll derjenigen Richtung entsprechen, in welcher sich die positive x-Achse drehen muß, um nach einer Drehung um 90^0 mit der positiven y-Achse zusammenzufallen.

Auf Grund dieser Beobachtung zeigen einfache geometrische Überlegungen, deren Mitteilung unnötig erscheint, die Berechtigung unserer Behauptung.

§ 14.

A. Durch die Gleichungen

$$(65.)\qquad \begin{cases} X = A + B\cos x + C\cos y = u\cdot\cos\varphi, \\ Y = \quad\; B\sin x + C\sin y = u\cdot\sin\varphi \end{cases}$$

wird jeder Position des Punktes w ein System von u-, φ-Werten zugeordnet. Fällt w mit einem kritischen Punkt zusammen, so ist $u = 0$ und φ unbestimmt. In jedem andern Fall hat man die Wahl zwischen zwei u-Werten, welche sich nur durch das Zeichen unterscheiden. Wählt man den positiven u-Wert, so fällt das System der noch zulässigen φ-Werte mit dem System derjenigen ψ-Werte zusammen, welche der gewählten Position des w-Punktes entsprechen. Wählt man dagegen den negativen u-Wert, so wird das System der noch zulässigen φ-Werte erhalten, indem man zu einem der eben genannten ψ-Werte alle denkbaren positiven oder negativen ungeraden Vielfachen von π hinzufügt.

Der Punkt w möge in stetiger Bewegung von einer Position w_1 in eine Position w_2 übergehen, ohne dabei mit einem kritischen Punkt in Berührung zu kommen. Es sei ferner φ_1 ein der Position w_1 entsprechender φ-Wert. Es können dann den verschiedenen Positionen des Punktes w entsprechende φ-Werte so ausgewählt werden, daß φ sich bei der Bewegung von w stetig ändert und im Anfangsmoment den Wert φ_1 annimmt. Durch die genannten Vorschriften ist φ eindeutig bestimmt. Die Änderung, welche φ beim Übergang des Punktes w von w_1 nach w_2 erleidet, ist gleich der Änderung, welche ψ beim genannten Übergang erfährt. *Diese Bemerkung gestattet, die im vorigen Paragraphen angeführten, die Änderung von ψ betreffenden Sätze für die Untersuchung der Funktion φ zu verwenden.*

Ist die Lage des Punktes w gegeben und φ gewählt, so hat u einen völlig bestimmten Wert. Führt w eine stetige Bewegung aus und ändert sich dabei der gewählte φ-Wert stetig, so geschieht auch die Änderung von u in stetiger Weise.

B. Der Punkt w möge aus der Anfangsposition w_1 in die davon verschiedene Endposition w_2 übergehen, indem er die w_1 und w_2 verbindende gerade Linie in einer Richtung durchläuft. Die Strecke $w_1 w_2$ besitze nicht die Richtung der x- oder y-Achse und enthalte einen und nur einen kritischen Punkt w_0, der *zwischen* w_1 und w_2 gelegen sei. Die Koordinaten von w können bei der erwähnten Bewegung dieses Punktes in der Form

$$x = a + m \cdot s, \quad y = b + n \cdot s \tag{66.}$$

dargestellt werden, wobei a, b die Koordinaten von w_1 sind und s die Entfernung $w w_1$ bezeichnet. m und n sind beide von Null verschieden. Die Entfernung $w_1 w_2$ bezeichnen wir mit S und die Entfernung $w_1 w_0$ mit σ. Beim Übergang des Punktes w von w_1 nach w_2 wächst s von 0 bis S. In dem Moment des Zusammenfallens von w und w_0 wird $s = \sigma$.

Die Koordinaten des Punktes W sind während der Bewegung von w ausgedrückt durch

$$\begin{cases} X = A + B \cos(a + ms) + C \cos(b + ns), \\ Y = \quad B \sin(a + ms) + C \sin(b + ns). \end{cases} \tag{67.}$$

Zieht man die der Bedingung $0 \leqq s \leqq S$ genügenden s-Werte in Betracht, so verschwinden die Ausdrücke (67.) gleichzeitig nur für $s = \sigma$. Nunmehr verwenden wir die in § 3 angestellten Untersuchungen. Es möge φ_1 einer der φ-Werte sein, welche der Position w_1 von w entsprechen. *Man kann dann, wie leicht aus den Erörterungen in* § 3 *folgt, während der Bewegung von w die Größe φ so wählen, daß sie sich stetig ändert und im Anfangsmoment den Wert φ_1 annimmt.* Bei Erfüllung der eben genannten Forderungen ist die Wahl von φ eindeutig bestimmt. Wären nämlich φ' und φ'' zwei diesen Forderungen entsprechende Funktionen, so würde sich $\varphi' - \varphi''$ während der Bewegung von w stetig ändern. Die genannte Differenz würde ferner, wenn man von dem Moment absieht, in welchem w mit w_0 zusammenfällt, stets ein Vielfaches von π darstellen müssen und würde im Anfangsmoment gleich Null sein. Aus diesen Aussagen folgt leicht, daß $\varphi' - \varphi''$ immer gleich Null ist. Man beachte noch, *daß die Änderung von φ beim erwähnten Übergang des Punktes w von w_1 nach w_2 unabhängig ist von der speziellen Wahl von φ_1.*

Vollführt w die eben beschriebene stetige Bewegung und wird dabei φ wie oben erwähnt gewählt, so ändert sich auch u in stetiger Weise. Wir überzeugen uns nun, daß die Ausdrücke

$$\frac{d}{ds}(A + B\cos(a+ms) + C\cos(b+ns)) = -mB\sin(a+ms) - nC\sin(b+ns),$$

$$\frac{d}{ds}(B\sin(a+ms) + C\sin(b+ns)) = \quad mB\cos(a+ms) + nC\cos(b+ns)$$

für $s=\sigma$ nicht gleichzeitig verschwinden. Wäre das letztere der Fall, so hätten wir

$$(68.) \qquad \begin{cases} mB\sin(a+m\sigma) + nC\sin(b+n\sigma) = 0, \\ mB\cos(a+m\sigma) + nC\cos(b+n\sigma) = 0, \end{cases}$$

wozu nach dem vorhergehenden die Gleichungen

$$(69.) \qquad \begin{cases} A + B\cos(a+m\sigma) + C\cos(b+n\sigma) = 0, \\ \quad B\sin(a+m\sigma) + C\sin(b+n\sigma) = 0 \end{cases}$$

kommen. $a+m\sigma$ und $b+n\sigma$ stellen die Koordinaten eines kritischen Punktes dar; keine dieser beiden Größen ist daher ein ganzes Vielfaches von π. Die Größen $\sin(a+m\sigma)$ und $\sin(b+n\sigma)$ sind daher von Null verschieden. Aus der ersten Gleichung (68.) und der zweiten Gleichung (69.) würde daher $m=n$ folgen. Aus der zweiten Gleichung (68.) und der ersten Gleichung (69.) wäre dann weiter $A=0$ zu folgern, was den Tatsachen nicht entspricht. Damit ist in der Tat bewiesen, daß die beiden oben erwähnten Differentialquotienten für $s=\sigma$ nicht gleichzeitig verschwinden. *Die Untersuchungen des* § 3 *lehren jetzt, daß u sein Zeichen ändert, wenn w bei der erwähnten Bewegung den kritischen Punkt* w_0 *überschreitet.*

Wenn im folgenden von einer stetigen Bewegung des Punktes w und einer gleichzeitigen Änderung von φ die Rede ist, so handelt es sich immer um eine stetige Änderung von φ.

C. Es möge nun auf der w-Ebene ein rechtwinkliges Dreieck vorliegen, welches folgenden Bedingungen genügt:

1. Das Dreieck ist ein eigentliches, d. h. es hat einen positiven Inhalt.

2. Die Katheten haben die Richtung der von uns auf der w-Ebene angenommenen Koordinatenachsen.

3. Innerhalb des Dreiecks liegt kein kritischer Punkt, auf der Peripherie aber *ein* solcher Punkt. Der letztere befindet sich auf der Hypotenuse zwischen ihren Endpunkten.

Wir wollen die Änderung bestimmen, die φ erfährt, wenn der Punkt w die Peripherie des Dreiecks einmal in positivem) Sinn durchläuft.* Zu diesem Zweck bezeichnen wir den erwähnten kritischen Punkt mit K und nehmen auf der Hypotenuse zu beiden Seiten von K irgend zwei Punkte α und β an. Hierauf fassen wir dasjenige rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse $\alpha\beta$ und mit den Achsen parallelen Katheten ins Auge, welches einen Teil des ursprünglichen Dreiecks bildet. Durchläuft w die Peripherie dieses neuen Dreiecks einmal in positivem Sinn, so ist die hierbei eintretende Änderung von φ nach den im vorhergehenden gewonnenen Resultaten offenbar gleich der von uns zu bestimmenden Änderung von φ. Diese Bemerkung gestattet, die bezüglich des ursprünglich gegebenen Dreiecks eingeführten Voraussetzungen durch folgende zu ergänzen, ohne die Allgemeinheit des Resultats zu beeinträchtigen.

1. Durchläuft w die Hypotenuse, so ändert sich φ um eine Größe, deren Absolutwert kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist.

2. Durchläuft w eine der Katheten, so ändert sich φ um eine Größe, deren Absolutwert kleiner als $\frac{5\pi}{4}$ ist (siehe § 13 D).

Durchläuft nun w einmal die ganze Peripherie des Dreiecks, so ändert sich φ um eine Größe, deren Absolutwert offenbar kleiner ist als

$$\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}=3\pi.$$

Beginnt w seine Bewegung an einer Ecke des Dreiecks, so kehrt w am Schluß der Bewegung zu derselben Ecke zurück. φ gehe dabei vom Anfangswert φ' in den Endwert φ'' über, u vom Anfangswert u' in den Endwert u''. Aus dem vorhergehenden folgt, daß u' und u'' *verschiedene Zeichen* besitzen.

*) Dieser Ausdruck ist analog zu verstehen wie in § 13 C.

Hieraus schließen wir weiter, daß φ' und φ'' sich um ein ungerades Vielfaches von π unterscheiden. Da andererseits, wie eben gezeigt,

$$|\varphi' - \varphi''| < 3\pi$$

gilt, so muß

$$|\varphi' - \varphi''| = \pi$$

sein. Wir ergänzen nun das gegebene Dreieck durch ein zweites rechtwinkliges Dreieck mit derselben Hypotenuse zu einem Rechteck. Ohne die Allgemeinheit des erstrebten Resultats zu beeinträchtigen, können wir voraussetzen, daß dieses Rechteck außer dem schon genannten kritischen Punkt einen weiteren weder im Innern noch auf der Peripherie besitzt. Die Änderungen, welche φ erfährt, wenn w die Peripherie des ersten Dreiecks, des zweiten Dreiecks und des Rechtecks in positivem Sinn einmal durchläuft, mögen resp. mit Φ_1, Φ_2, Φ bezeichnet werden. Offenbar gilt $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. Nun wissen wir aber (s. § 13 C), daß Φ gleich 2π oder gleich -2π ist, je nachdem der betreffende kritische Punkt ein solcher erster oder zweiter Klasse ist. Andererseits ist, wie wir eben gesehen haben, $|\Phi_1| = |\Phi_2| = \pi$. *Wir schließen aus dem gesagten, daß* $\Phi_1 = \Phi_2 = \pi$ *oder* $\Phi_1 = \Phi_2 = -\pi$ *gilt, je nachdem es sich um einen kritischen Punkt erster oder zweiter Klasse handelt.* Damit haben wir die uns gestellte Aufgabe gelöst.

D. Auf der w-Ebene möge eine endlose Gerade G gegeben sein, die nicht die Richtung einer der Achsen hat. *Zu jeder positiven Zahl L kann eine solche positive Zahl P bestimmt werden, daß folgendes gilt: Durchläuft der Punkt w auf der Geraden G eine Strecke $w_1 w_2$, wobei w_1, w_2 voneinander verschiedene Punkte sind, deren gegenseitiger Abstand $\leqq L$ ist und welche mit keinem kritischen Punkt koinzidieren, so ändert sich hierbei φ um eine Größe, deren Absolutwert $\leqq P$ ist.*

Um diese Behauptung zu beweisen, nehmen wir L als fest gewählt an. Offenbar gibt es dann solche positiven ganzen Zahlen M und N, daß folgendes gilt: Konstruieren wir ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse auf G liegt und $\leqq L$ ist und dessen Katheten die Richtungen der Achsen haben, so liegen im Innern und auf der Peripherie dieses Dreiecks weniger als M kritische Punkte und die Länge jeder Kathete ist kleiner

als $N \cdot \frac{\pi}{4}$. Man kann dann zeigen, daß den Forderungen unseres Satzes genügt wird, wenn

$$P = M \cdot 2\pi + 2N \cdot \frac{5\pi}{4}$$

angenommen wird.

Zu dem genannten Zweck wählen wir auf G zwei voneinander verschiedene mit keinem kritischen Punkt koinzidierende Punkte w_1, w_2 aus, deren Abstand $\leqq L$ ist. $w_1 w_2$ nehmen wir als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Richtungen der Achsen haben. *Wir setzen zunächst voraus, daß auf den Katheten kein kritischer Punkt vorhanden ist,* und bezeichnen mit μ' und μ'' die Anzahl der auf der Hypotenuse liegenden kritischen Punkte erster und zweiter Klasse. ν' und ν'' mögen die Anzahl der im Innern des Dreiecks liegenden kritischen Punkte erster und zweiter Klasse bedeuten. Durchläuft w, von einer Ecke ausgehend, die Peripherie des Dreiecks in positiver Richtung, so ändert sich φ, wie leicht zu sehen, um

$$\mu' \cdot \pi - \mu'' \cdot \pi + \nu' \cdot 2\pi - \nu'' \cdot 2\pi.$$

Der Absolutwert des letzten Ausdrucks ist $< M \cdot 2\pi$. Während w eine Kathete durchläuft, ändert sich φ um eine Größe, deren Absolutwert

$$< N \frac{5\pi}{4}$$

ist (s. § 13 D). Durchläuft w die Hypotenuse, so ändert sich, wie nunmehr leicht folgt, φ um eine Größe, deren Absolutwert kleiner als

$$M \cdot 2\pi + 2N \cdot \frac{5\pi}{4}$$

ist. Damit ist unsere Behauptung für den Fall, daß auf den Katheten kein kritischer Punkt vorhanden ist, bewiesen.

Wir setzen nunmehr voraus, daß die Katheten nicht von kritischen Punkten frei sind. In diesem Falle ist es offenbar möglich, auf der Hy-

potenuse zwischen ihren Endpunkten zwei verschiedene mit keinem kritischen Punkt zusammenfallende Punkte v_1 und v_2 so anzugeben, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. v_1 und v_2 liegen in beliebiger Nähe von w_1 und w_2.

2. $v_1 v_2$ kann als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks dienen, dessen Katheten die Richtungen der Achsen haben und von kritischen Punkten frei sind.

Nach dem eben bewiesenen ist es klar, daß, wenn w die Strecke $v_1 v_2$ durchläuft, φ sich um eine Größe ändert, deren Absolutwert $\leqq P$ ist.

Indem wir beachten, daß die besprochenen Änderungen von φ stetig erfolgen, erkennen wir nunmehr leicht, daß, wenn w die Strecke $w_1 w_2$ durchläuft, φ sich um eine Größe ändert, deren Absolutwert $\leqq P$ ist. Damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen. *Es ist auch klar, daß wir in der Behauptung die Bedingung fortlassen können, gemäß welcher w_1 und w_2 mit keinem kritischen Punkt koinzidieren, wenn wir nur die Änderung von φ in stetiger Weise geschehen lassen.*

§ 15.

A. Auf der w-Ebene sei eine unbegrenzte Gerade L gegeben, welche die Gleichung

$$y = \mu x + y_0 \tag{70.}$$

besitzt. μ und y_0 sind hierbei Konstanten, *von denen die erste, d. h. der Richtungskoeffizient der Geraden,* $> \frac{\beta}{\pi - \gamma}$ *sein möge.* Zieht man durch den Punkt G (s. die Fig. 3) eine Parallele zu der gegebenen Geraden, so durchschneidet diese Parallele, wie leicht zu sehen, das Dreieck PGT*).

Wir wollen uns nun vorstellen, der Punkt w bewege sich auf L, von einem festen Anfangspunkte ausgehend, in der Weise, daß y unbegrenzt wächst. Entsprechend dieser Bewegung von w ändere sich φ stetig. Es ist für unsere Zwecke geboten, die Gesamtänderung zu studieren, welche φ vom Anfangsmoment bis zu einem späteren Moment erleidet;

*) T ist der Fußpunkt der von G auf die Gerade $y = -\pi$ gefällten Senkrechten.

hierbei kommt es aber auf die Hinzufügung von Größen nicht an, falls die letzteren bei unbegrenztem Wachsen von y zwischen endlichen Grenzen bleiben.

Zunächst wollen wir als Anfangspunkt der Bewegung von w denjenigen Punkt R wählen, in welchem L die y-Achse schneidet. Ferner wollen wir zunächst nur solche Endmomente zulassen, für welche y ein ganzes Vielfaches von 2π ist. P sei die Position von w in einem solchen Endmoment, PS sei die von P auf die y-Achse gefällte Senkrechte. (s. Fig. 5).

Der Punkt w möge nun, von R ausgehend, die Peripherie des Dreiecks RPS in positivem Sinn durchlaufen und somit von R nach P, weiter von P nach S und endlich von S nach R gehen. Beim Durchlaufen der Hypotenuse erfahre φ den Zuwachs Φ, beim Durchlaufen der Katheten PS und SR die Zuwächse Φ_1 und Φ_2. Man kann zeigen, daß

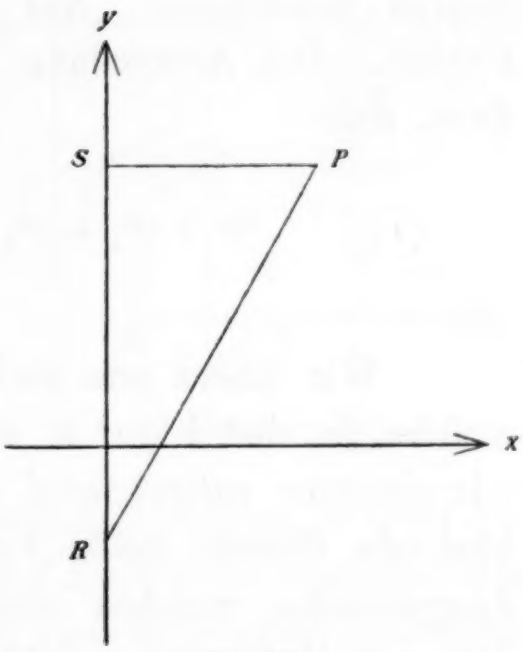

Fig. 5.

$$|\Phi_1| < \pi \text{ und } |\Phi_2| < \pi$$

gilt. Zu diesem Zweck beachte man die Bahn, welche der Punkt W (s. § 13 A) beschreibt, während w die Kathete PS oder die Kathete SR durchläuft. Im ersten Fall bewegt sich W auf einem Kreise mit dem Radius B, dessen Mittelpunkt die Koordinaten

$$X = A + C, \qquad Y = 0$$

hat. Im zweiten Fall bewegt sich W auf einem Kreise mit dem Radius C, dessen Mittelpunkt die Koordinaten

$$X = A + B, \qquad Y = 0$$

besitzt. Beachtet man

$$A + C > B \text{ und } A + B > C,$$

so ist die Richtigkeit unserer Bemerkung offenbar.

Den Zuwachs, welchen φ erfährt, wenn w die Peripherie des Dreiecks RPS in positivem Sinn durchläuft, d. h. die Größe

$$\Phi + \Phi_1 + \Phi_2$$

wollen wir nun noch in anderer Weise darstellen. Wir bezeichnen mit m_1 die Anzahl der im Innern des Dreiecks RPS gelegenen kritischen Punkte erster Klasse, mit m_2 die Anzahl der im Innern des Dreiecks RPS gelegenen kritischen Punkte zweiter Klasse. n_1 und n_2 mögen die Anzahl der auf der Hypotenuse gelegenen kritischen Punkte erster resp. zweiter Klasse bezeichnen. Auf den Katheten befinden sich keine kritischen Punkte. Die Anwendung der im vorhergehenden gefundenen Sätze lehrt dann, daß

$$(71.) \qquad \Phi + \Phi_1 + \Phi_2 = m_1 \cdot 2\pi - m_2 \cdot 2\pi + n_1 \cdot \pi - n_2 \cdot \pi$$

gilt.

Wir führen nun einige Bezeichnungen ein. Zwei kritische Punkte, welche in der Figur 3 durch eine Gerade verbunden erscheinen, wollen wir *einander entsprechend* nennen. Die zwei entsprechende Punkte verbindende Gerade heiße *Verbindungsstrecke*. Dasjenige Ende einer Verbindungsstrecke, welches einen kritischen Punkt erster Klasse trägt, heiße das *erste* Ende; das andere Ende nennen wir das *zweite* Ende. Es wurde schon erwähnt, daß die Katheten von RPS keine kritischen Punkte enthalten. Wir beachten ferner, daß diese Katheten mit keiner Verbindungsstrecke einen gemeinsamen Punkt haben.

Bei der Berechnung der rechten Seite von (71.) können wir offenbar von den im Innern des Dreiecks RPS gelegenen kritischen Punkten alle Paare entsprechender Punkte fortlassen. Nachdem dies geschehen ist, haben wir unsere Aufmerksamkeit noch auf zwei Kategorieen von innerhalb RPS gelegenen kritischen Punkten zu lenken: erstens auf diejenigen Punkte, deren entsprechende Punkte außerhalb RPS liegen; zweitens auf diejenigen Punkte, deren entsprechende Punkte auf der Hypotenuse liegen. Die Punkte der ersten Kategorie sind offenbar erster Klasse und ihre Anzahl ist gleich der Anzahl von Verbindungsstrecken, welche von RP zwischen ihren Endpunkten geschnitten werden. Die Punkte der zweiten Kategorie sind ebenfalls erster Klasse, und ihre Anzahl gibt an, wievielmal RP durch

zweite Enden von Verbindungsstrecken hindurchgeht. Außerdem sind noch die auf der Hypotenuse gelegenen kritischen Punkte zu berücksichtigen. Von ihnen gehören zur ersten Klasse so viele Punkte, als erste Enden von Verbindungsstrecken auf RP liegen. Zur zweiten Klasse gehören so viele Punkte, als zweite Enden von Verbindungsstrecken auf RP liegen. Durchschneidet daher RP δ-mal eine Verbindungsstrecke zwischen ihren Endpunkten, geht ferner die genannte Hypotenuse RP ε_1-mal durch ein erstes, ε_2-mal durch ein zweites Ende einer Verbindungsstrecke, so haben wir

$$(72.) \qquad \begin{aligned} &\Phi + \Phi_1 + \Phi_2 = \delta \cdot 2\pi + \varepsilon_2 \cdot 2\pi + \\ &+ \varepsilon_1 \cdot \pi - \varepsilon_2 \pi = \delta \cdot 2\pi + \varepsilon \cdot \pi . \end{aligned}$$

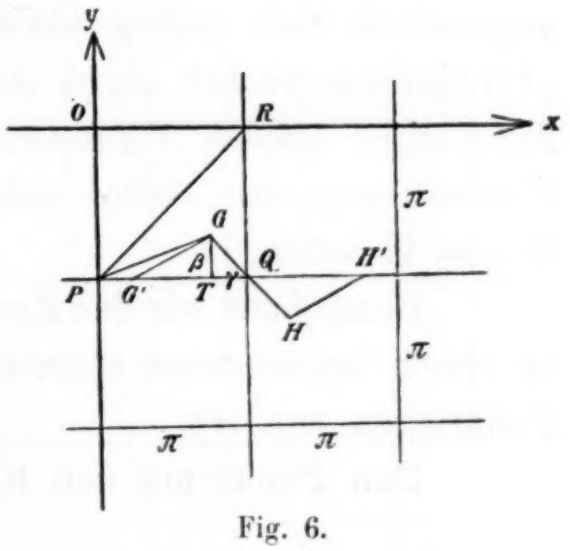

Fig. 6.

Hierbei gibt $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ an, wievielmal RP durch das Ende einer Verbindungsstrecke geht. Indem wir § 14 D beachten, können wir nun folgenden Satz aussprechen: *Durchläuft w, von irgendeinem festen Punkt ausgehend, die Gerade L in der Weise, daß y unbeschränkt wächst, so wird der dabei eintretende Zuwachs von φ ausgedrückt durch $d \cdot 2\pi + e \cdot \pi$, abgesehen von einem Summanden, welcher bei der Bewegung von w zwischen endlichen Grenzen bleibt. Dabei gibt die ganze Zahl d an, wievielmal w während des vollführten Teils der Bewegung auf eine Verbindungsstrecke (mit Ausschluß der Endpunkte) zu liegen kommt. Die ganze Zahl e gibt an, wievielmal w während des genannten Teils der Bewegung mit einem Ende einer Verbindungsstrecke zusammentrifft.*

B. Dem eben gefundenen Resultat wollen wir eine andere Form geben und zu diesem Zweck einige neue Bezeichnungen einführen. Durch den Punkt G (s. Fig. 6, welche eine Wiederholung eines Teils der Fig. 3 darstellt), ziehen wir eine mit L einerlei Richtung besitzende Gerade. Dieselbe durchschneidet, wie schon erwähnt, das Dreieck PGT und möge die Gerade $y = -\pi$ in G' treffen. Wir ziehen ferner durch H eine Parallele zu L; dieselbe möge die Gerade $y = -\pi$ in H' treffen. Offenbar gilt

$$(73.) \qquad G'Q = H'Q = \gamma + \frac{\beta}{\mu}.$$

Wir nennen G', H' *die den kritischen Punkten* G, H *zugeordneten Punkte.* Es heiße ferner der Geradenabschnitt $G'H'$ *die der Verbindungsstrecke* GH *zugeordnete Strecke.* Von den Enden der Strecke $G'H'$ heiße G' *das erste*, H' *das zweite Ende.* Analog wie mit der Verbindungsstrecke HG verfahren wir mit den übrigen Verbindungsstrecken; die betreffenden Konstruktionen gehen durch zu den Achsen parallele Verschiebungen um Vielfache von 2π ineinander über.

Es ist nun leicht zu sehen, *daß der am Schlusse von* § 15 A *ausgesprochene Satz richtig bleibt, wenn wir in seiner Formulierung das Wort „Verbindungsstrecke" durch den Ausdruck „zugeordnete Strecke" ersetzen. Im Falle einer solchen Veränderung wollen wir übrigens an Stelle der bei der Formulierung des Satzes gebrauchten Buchstaben d und e die Buchstaben* $\mathfrak{D}$ *und* $\mathfrak{E}$ *setzen.*

Bezeichnen wir den Zuwachs der Größe y von Anfang der Bewegung bis zu einem betrachteten späteren Moment mit Δy, so sind $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ eindeutige Funktionen von Δy.

Den Punkt mit den Koordinaten

$$x = -\frac{y_0 + \pi}{\mu}, \quad y = -\pi, \tag{74.}$$

welcher offenbar auf L gelegen ist, bezeichnen wir mit M. Von diesem Punkte M ausgehend, möge nunmehr w sich in der Weise auf L bewegen, daß y beständig wachsend den Zuwachs

$$2\pi \cdot g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)$$

erfährt. Das Symbol $g(z)$ wird hierbei gebraucht, um die kleinste ganze Zahl zu bezeichnen, die größer ist als z.

$$2\pi \cdot g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)$$

ist hiernach, wie leicht zu sehen, das kleinste ganze Vielfache von 2π, das größer ist als Δy. Die ganze Zahl D soll nun angeben, wievielmal bei der soeben genannten Bewegung w auf einer zugeordneten Strecke (mit Ausschluß der Endpunkte) liegt. Die ganze Zahl E soll angeben, wievielmal

w bei dieser Bewegung mit einem Ende einer zugeordneten Strecke zusammenfällt. Offenbar unterscheiden sich $\mathfrak{D}$ und D, sowie $\mathfrak{E}$ und E um Größen, welche bei unbeschränktem Wachstum von Δy zwischen endlichen Grenzen bleiben. Es bleibt daher auch der Unterschied von

$$\mathfrak{D}\cdot 2\pi+\mathfrak{E}\cdot\pi \text{ und } D\cdot 2\pi+E\cdot\pi$$

zwischen endlichen Grenzen, wenn Δy unbeschränkt wächst. Wir können hiernach folgenden Satz aussprechen:

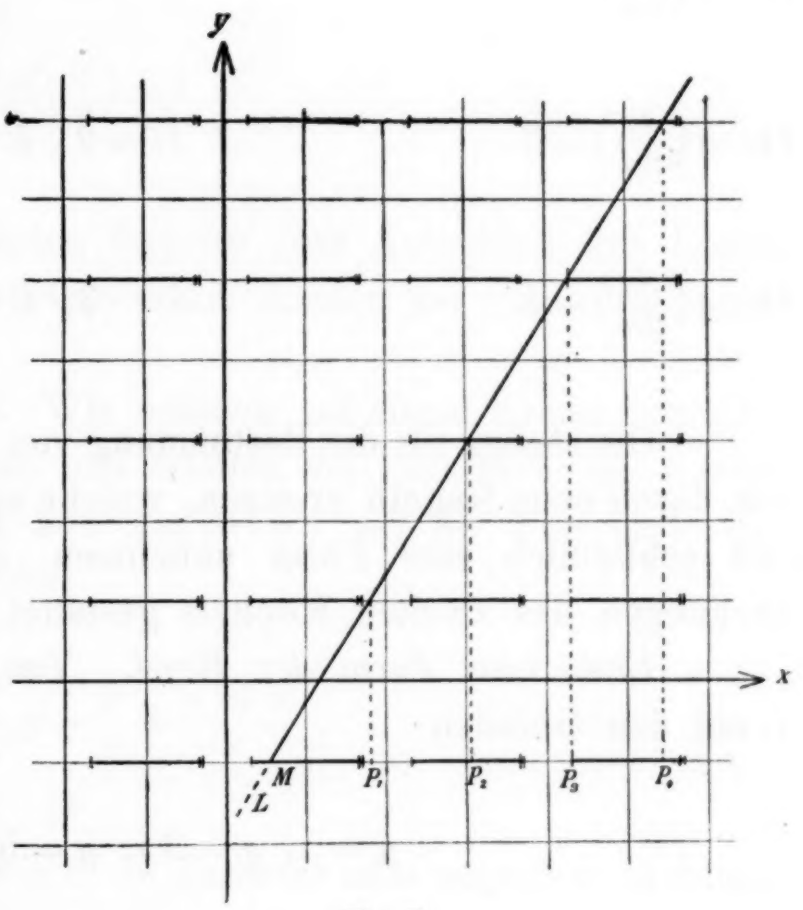

Fig. 7.

Der Punkt w möge, von irgend einem festen Punkt der Geraden L ausgehend, sich auf dieser Geraden so bewegen, daß y unbeschränkt wächst. Hat y seit dem Anfang der Bewegung den positiven Zuwachs Δy erfahren, so ist der entsprechende Zuwachs von φ, abgesehen von einem Summanden, der bei unbeschränktem Wachstum von y zwischen endlichen Grenzen bleibt, gleich $D\cdot 2\pi+E\cdot\pi$, wobei die ganzen Zahlen D und E in folgender Weise gefunden werden. Man lasse den Punkt w sich, von M ausgehend, so auf der Geraden L bewegen, daß y stets wachsend den Zuwachs

$$2\pi\cdot g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)$$

erfährt. Die Zahl D gibt an, wievielmal bei dieser letztgenannten Bewegung w auf einer zugeordneten Strecke (mit Ausschluß der Enden) liegt. Die Zahl E gibt an, wievielmal bei dieser Bewegung w auf einem Ende einer zugeordneten Strecke liegt.

Die Figur 7 erläutert die Bestimmung von D und E. Die Zeichen | und ‖ weisen in derselben auf die Enden der zugeordneten Strecken hin. In dem durch die Figur dargestellten Fall haben wir

für $g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)=1$ $\quad D=1,\ E=0;$

für $g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)=2$ $\quad D=2,\ E=0;$

für $g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)=3$ $\quad D=2,\ E=1;$

für $g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)=4$ $\quad D=3,\ E=1.$

Die soeben für die Bestimmung von D und E gegebene Regel wollen wir durch neue Regeln ersetzen, welche sukzessive auseinander hervorgehen und schließlich eine Form annehmen, die eine Anwendung der Untersuchungen des zweiten Kapitels gestattet.

Erste neue Form der Regel. Von den Schnittpunkten der Geraden L mit den Geraden

$$y=\pi,\ y=3\pi,\ y=5\pi,\ y=7\pi,\ldots$$

fällen wir auf die Gerade

$$y=-\pi$$

Senkrechte, deren Fußpunkte wir mit

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$$

bezeichnen (s. Fig. 7). Die Zahl D gibt dann an, wie viele der Punkte

$$M, P_1, P_2, \ldots P_{y\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)}$$

auf einer zugeordneten Strecke (die Enden ausgeschlossen) liegen. Die Zahl E gibt an, wie viele dieser Punkte mit dem Ende einer zugeordneten Strecke zusammenfallen.

Zweite neue Form der Regel. Wir spannen einen einseitig unbegrenzten mit Knoten versehenen Faden*) von der Sprossenlänge $\frac{2\pi}{\mu}$ in der Richtung der positiven x-Achse so aus, daß das Fadenende mit M zusammenfällt. Die Zahl D gibt an, wie viele der

$$g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)+1$$

ersten Knoten auf einer zugeordneten Strecke (mit Ausschluß der Enden) liegen. Die Zahl E gibt an, wie viele dieser Knoten auf einem Ende einer zugeordneten Strecke liegen.

Dritte neue Form der Regel. Wir nehmen auf einem Kreise vom Umfange 2π einen festen Punkt $\mathfrak{M}$ an und erteilen der Peripherie des Kreises eine positive Richtung. Von $\mathfrak{M}$ aus tragen wir auf der Peripherie eine Strecke von der Länge $|\tau|$ ab, wobei

$$\tau = \pi - \gamma - \frac{\beta}{\mu} + \frac{y_0 + \pi}{\mu}$$

ist; und zwar tun wir dies, wenn $\tau \neq 0$, in positiver oder negativer Richtung, je nachdem

$$\tau > 0 \text{ oder } \tau < 0$$

gilt. Der Endpunkt der genannten Strecke sei $\mathfrak{A}$. Von $\mathfrak{A}$ aus tragen wir in positiver Richtung eine Strecke von der Länge

$$2\left(\gamma + \frac{\beta}{\mu}\right)$$

auf der Peripherie ab. Der Endpunkt dieser neuen Strecke sei $\mathfrak{B}$. Die

*) Wir gebrauchen hier die im zweiten Kapitel eingeführten Namen.

Länge der Strecke $\mathfrak{AB}$ ist gleich der Länge der oben vorkommenden „zugeordneten Strecken“ und daher $< 2\pi$. Von $\mathfrak{M}$ aus wickeln wir nun den in der zweiten neuen Form der Regel erwähnten Faden in positiver Richtung auf. Die Zahl D gibt an, wie viele der

$$g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)+1$$

ersten Knoten auf der Strecke $\mathfrak{AB}$ (mit Ausschluß der Enden) liegen. Die Zahl E gibt an, wie viele der genannten Knoten mit einem Ende von $\mathfrak{AB}$ zusammenfallen.

Vierte neue Form der Regel. Wir nehmen auf einem Kreise vom Umfang 1 einen festen Punkt N an und erteilen der Peripherie des Kreises eine positive Richtung. Von N aus tragen wir auf der Peripherie eine Strecke von der Länge $\left|\frac{\tau}{2\pi}\right|$ ab*); und zwar tun wir dies, wenn $\tau \neq 0$, in positiver oder negativer Richtung, je nachdem

$$\tau > 0 \text{ oder } \tau < 0$$

gilt. Der Endpunkt der genannten Strecke sei A. Von A aus tragen wir in positiver Richtung eine Strecke von der Länge

$$\frac{1}{\pi}\left(\gamma+\frac{\beta}{\mu}\right)$$

auf der Peripherie ab. Der Endpunkt dieser neuen Strecke sei B. Die Länge der Strecke AB ist < 1. Von N aus wickeln wir einen einseitig unbegrenzten mit Knoten versehenen Faden von der Sprossenlänge $\frac{1}{\mu}$ in positiver Richtung auf. Die Zahl D gibt an, wie viele der

$$g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)+1$$

*) Die Bedeutung von τ ist in der dritten Form der Regel angegeben.

ersten Knoten auf der Strecke AB (mit Ausschluß der Enden) liegen. Die Zahl E gibt an, wie viele der genannten Knoten mit einem Ende von AB zusammenfallen.

§ 16.

A. Wir unterbrechen die im vorigen Paragraphen begonnene Untersuchung, um einige Bemerkungen zusammenzustellen, die sich auf die Betrachtungen des zweiten Kapitels stützen.

Auf einem Kreise vom Umfange 1 nehmen wir einen Punkt Q an. Der Kreisperipherie werde eine positive Richtung erteilt und es seien a, s, r gegebene Größen, von denen die beiden letzten den Bedingungen

$$0 < s < 1, \quad r > 0$$

genügen. Von Q aus tragen wir auf der Peripherie eine Strecke von der Länge $|a|$ ab, und zwar, falls $a \neq 0$, in positiver oder negativer Richtung, je nachdem

$$a > 0 \text{ oder } a < 0$$

gilt. Der Endpunkt dieser Strecke sei A. Von A aus tragen wir in positiver Richtung eine Strecke von der Länge s auf der Peripherie ab; der Endpunkt dieser neuen Strecke sei B. Endlich wickeln wir einen einseitig unbegrenzten mit Knoten versehenen Faden von der Sprossenlänge r auf die Peripherie auf, indem wir vom Punkte Q ausgehen und die positive Richtung einschlagen. Die sich dann ergebende Verteilungsfunktion bezeichnen wir mit $\Phi(a, s, r, n)$. Diese Funktion gibt nach Kapitel II die Anzahl derjenigen unter den n ersten Knoten an, welche bei der Aufwickelung auf der oben genannten Strecke AB (mit Ausschluß der Enden) liegen. Wir erhalten offenbar dieselbe Funktion, wenn wir an Stelle von a eine Größe setzen, die sich von a um eine ganze Zahl unterscheidet. Nach dem zweiten Kapitel existiert

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Phi(a, s, r, n)}{n}.$$

Es ist dies die „charakteristische Zahl“ der Verteilungsfunktion. Gibt es eine solche Konstante c, daß die Differenz $\Phi(a, s, r, n) - c \cdot n$ für unbeschränkt wachsende n zwischen endlichen Grenzen bleibt, so sagen wir nach dem zweiten Kapitel, die Verteilungsfunktion besitze einen linearen Charakter. c ist dann die charakteristische Zahl von Φ. Ob Φ linearen Charakter besitzt oder nicht, hängt nur von s und r ab. Ist r rational, so besitzt Φ immer einen linearen Charakter. Betrachten wir s als fest gewählt und ist außerdem eine positive Größe $\mathfrak{r}$ gegeben, so kann man die Sprossenlänge r so wählen, daß der Unterschied von r und $\mathfrak{r}$ absolut beliebig klein wird und ein Φ von linearem Charakter sich ergibt. Man kann aber auch andererseits die Sprossenlänge so bestimmen, daß $|r - \mathfrak{r}|$ beliebig klein wird und Φ einen linearen Charakter nicht besitzt.

Wir wollen nun *erstens* annehmen, r sei *irrational*. Dann ist die charakteristische Zahl von Φ gleich s. Ferner können in diesem Fall höchstens zwei Knoten auf die Enden der Strecke AB fallen.

Wir nehmen *zweitens* an, r sei *rational*. Man denke sich in diesem Fall r in der Form $r = \frac{\mu}{\nu}$ dargestellt, wobei μ, ν positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler bedeuten. Wir teilen dann die Peripherie durch ν Punkte in ν gleiche Teile, und zwar in der Weise, daß ein Teilungspunkt mit dem Anfangspunkt des Fadens d. h. Q zusammenfällt. Das System der ν Teilpunkte möge mit Σ bezeichnet werden. Dann fallen bei der Aufwickelung des Fadens die ν ersten Knoten mit Σ zusammen; dasselbe gilt von den ν darauf folgenden Knoten etc. Von den ν zu Σ gehörenden Punkten mögen σ mit den Enden der Strecke AB zusammenfallen. Wie leicht zu sehen, ist σ entweder gleich 0, oder gleich 1, oder gleich 2; und zwar gibt σ an, wieviel ganze Zahlen sich unter den beiden Werten $\nu \cdot a$ und $\nu \cdot (a + s)$ befinden. Die Anzahl derjenigen Teilpunkte des Systems Σ, welche auf der Strecke AB (mit Ausschluß der Endpunkte) liegen, bezeichnen wir mit λ. Dann ist die charakteristische Zahl gleich $\frac{\lambda}{\nu}$. Man erkennt leicht, daß λ angibt, wieviel ganze Zahlen, zu denen wir auch 0 rechnen, *zwischen* $\nu \cdot a$ und $\nu (a + s)$ liegen. Endlich ist ohne Mühe ersichtlich, daß von den n ersten Knoten $\sigma \cdot g\left(\frac{n}{\nu}\right) + d$ auf die Enden der Strecke AB fallen, wobei d eine Größe ist, die bei unbeschränktem Wachstum von n zwischen endlichen Grenzen bleibt.

B. Wir fahren nun in der in § 15 begonnenen Untersuchung fort. Die Anwendung der soeben in § 16 A gemachten Bemerkungen ergibt sich übrigens von selbst. Es wird daher genügen, das Ergebnis dieser Anwendung ohne weiteres zu formulieren. Dabei schreiben wir der Kürze wegen

$$\mathfrak{a}=\frac{1}{2\pi}\left(\pi-\gamma-\frac{\beta}{\mu}+\frac{y_0+\pi}{\mu}\right), \qquad \mathfrak{s}=\frac{1}{\pi}\left(\gamma+\frac{\beta}{\mu}\right)$$

und führen *im Falle, wo μ eine rationale Zahl ist*, folgende Bezeichnungen ein: $\mu=\frac{\mu_1}{\mu_2}$, wobei μ_1, μ_2 positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler bedeuten; G ist die Anzahl der *zwischen* $\mu_1\cdot\mathfrak{a}$ und $\mu_1\cdot(\mathfrak{a}+\mathfrak{s})$ liegenden ganzen Zahlen; $\mathfrak{g}$ ist die Anzahl der mit $\mu_1\cdot\mathfrak{a}$ oder $\mu_1(\mathfrak{a}+\mathfrak{s})$ zusammenfallenden ganzen Zahlen.

Der Punkt w möge, von irgend einem festen Punkt der Geraden L ausgehend, sich auf dieser Geraden so bewegen, daß y unbeschränkt wächst. Hat y seit dem Anfang der Bewegung den positiven Zuwachs Δy erfahren, so ist der entsprechende Zuwachs von φ, abgesehen von einem Summanden, *der bei unbeschränktem Wachstum von y zwischen endlichen Grenzen bleibt, gleich*

$$(75.) \qquad 2\pi\cdot\Phi\left(\mathfrak{a},\mathfrak{s},\frac{1}{\mu},g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)\right)+\eta\cdot\Delta y.$$

Hierbei bedeutet η die Zahl 0, wenn μ irrational ist, dagegen die Größe $\frac{\mathfrak{g}}{2\mu_1}$, wenn μ rational ist. Die charakteristische Zahl von

$$\Phi\left(\mathfrak{a},\mathfrak{s},\frac{1}{\mu},g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)\right)$$

ist für ein irrationales μ gleich $\mathfrak{s}$, für ein rationales μ aber gleich $\frac{G}{\mu_1}$.

§ 17.

A. Gestützt auf die bisher gewonnenen Ergebnisse können wir nunmehr zur direkten Behandlung des uns interessierenden Problems übergehen. Es mögen die Funktionen

$$(76.)\quad \begin{cases} \xi = A_1 \cos(g_1 \cdot t + \beta_1) + A_2 \cos(g_2 \cdot t + \beta_2) + A_3 \cos(g_3 \cdot t + \beta_3), \\ \eta = A_1 \sin(g_1 \cdot t + \beta_1) + A_2 \sin(g_2 \cdot t + \beta_2) + A_3 \sin(g_3 \cdot t + \beta_3) \end{cases}$$

vorliegen. Dabei sind

$$A_1, A_2, A_3, g_1, g_2, g_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$$

Konstanten, die den Bedingungen

$$(77.)\qquad g_1 < g_2 < g_3, \quad 0 < 2A_\mu < A_1 + A_2 + A_3 \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

genügen. t ist eine unbeschränkt veränderliche Variable.

Wir wollen zunächst zeigen, daß, wenn $t = t_0$ eine (etwa vorhandene) „Nullstelle“*) darstellt, diese stets „erster Ordnung“ ist**). Zu dem Zweck bezeichnen wir der Kürze wegen

$$a_1 = g_1 t_0 + \beta_1, \quad a_2 = g_2 t_0 + \beta_2, \quad a_3 = g_3 t_0 + \beta_3.$$

Wäre nun unsere Bemerkung nicht richtig, so hätten wir

$$(78.)\qquad A_1 \cos a_1 + A_2 \cos a_2 + A_3 \cos a_3 = A_1 \sin a_1 + A_2 \sin a_2 + A_3 \sin a_3 = 0,$$

$$g_1 A_1 \cos a_1 + g_2 A_2 \cos a_2 + g_3 A_3 \cos a_3 = g_1 A_1 \sin a_1 + g_2 A_2 \sin a_2 + g_3 A_3 \sin a_3 = 0.$$

Da ferner

$$\begin{vmatrix} g_2 & g_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = g_2 - g_3, \qquad \begin{vmatrix} g_3 & g_1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = g_3 - g_1, \qquad \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = g_1 - g_2$$

von Null verschieden sind, so gibt es dann solche Zahlen p, q, daß

*) Bezüglich der Bezeichnungen s. Kapitel I.

**) Diese Bemerkung ist übrigens für das folgende nicht nötig.

$$A_1 \cos a_1 = p\,(g_2 - g_3), \qquad A_2 \cos a_2 = p\,(g_3 - g_1), \qquad A_3 \cos a_3 = p\,(g_1 - g_2),$$
$$A_1 \sin a_1 = q\,(g_2 - g_3), \qquad A_2 \sin a_2 = q\,(g_3 - g_1), \qquad A_3 \sin a_3 = q\,(g_1 - g_2).$$

Hieraus folgt

$$\sin(a_2 - a_1) = \sin(a_3 - a_2) = \sin(a_1 - a_3) = 0.$$

Es sind also

$$a_2 - a_1,\ a_3 - a_2,\ a_1 - a_3$$

ganze Vielfache von π. Wir wählen nun ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt 0 und ziehen drei Vektoren von den Längen A_1, A_2, A_3 und den Amplituden a_1, a_2, a_3 in der Weise, daß der Anfangspunkt des ersten Vektors mit 0 zusammenfällt, während der Anfangspunkt jedes weiteren Vektors mit dem Endpunkt des vorhergehenden koinzidiert. Dann bilden nach (78.) die drei Vektoren ein Dreieck, dessen Seiten die Längen A_1, A_2, A_3 haben. Es ist daher offenbar nicht möglich, daß eine der Differenzen

$$a_2 - a_1,\ a_3 - a_2,\ a_1 - a_3$$

ein ganzes Vielfaches von π darstellt. Wir sind also zu einem Widerspruch gekommen und können unsere Behauptung als bewiesen betrachten.

Wir wissen aus dem ersten Kapitel, daß es für alle t definierte stetige Funktionen χ gibt, welche für alle t den Bedingungen

$$(79.) \qquad v \cdot \cos\chi = \xi, \quad v \cdot \sin\chi = \eta$$

genügen, wenn v geeignet gewählt wird. Alle den genannten Bedingungen genügenden Funktionen wollen wir χ-Funktionen nennen. Bezüglich der Eigenschaften dieser Funktionen verweisen wir auf § 3.

Falls für eine χ-Funktion $\frac{\chi(t)}{t}$ mit unbeschränkt wachsendem t nach einer endlichen Grenze c strebt, so gilt dasselbe für jede χ-Funktion, und c hat für alle diese Funktionen denselben Wert. In diesem Falle nennen wir c die *charakteristische Zahl* der χ-Funktionen. Wir werden alsbald sehen, daß eine solche charakteristische Zahl *immer* existiert. Kann eine

Konstante k so bestimmt werden, daß für *eine* χ-Funktion $\chi - k \cdot t$ bei unbeschränkt wachsendem t zwischen endlichen Grenzen bleibt, so gilt entsprechendes für alle χ-Funktionen und k ist die charakteristische Zahl derselben. In diesem Fall sagen wir nach § 4, es existiere eine *mittlere Bewegung* und nennen k die *Konstante der mittleren Bewegung.* Die letztere ist, wie soeben gesagt, gleich der charakteristischen Zahl. Wir werden alsbald sehen, daß *keineswegs immer* eine mittlere Bewegung existiert.

Wir bemerken schließlich, daß aus den Gleichungen (79.) die neuen Gleichungen

$$(80.)\quad \begin{cases} v \cdot \cos f = A_1 + A_2 \cos((g_2 - g_1)\,t + \beta_2 - \beta_1) \\ \qquad\qquad + A_3 \cos((g_3 - g_1)\,t + \beta_3 - \beta_1), \\ v \cdot \sin f = \quad A_2 \sin((g_2 - g_1)\,t + \beta_2 - \beta_1) \\ \qquad\qquad + A_3 \sin((g_3 - g_1)\,t + \beta_3 - \beta_1) \end{cases}$$

tolgen, in welchen der Kürze wegen

$$f = \chi - g_1 \cdot t - \beta_1$$

gesetzt ist.

B. Wir werden nun ein Theorem formulieren, welches die Hauptergebnisse dieser Arbeit zusammenfaßt. Vorher führen wir einige Bezeichnungen ein.

Aus drei Strecken von den Längen A_1, A_2, A_3 stellen wir ein Dreieck her und bezeichnen die Größen der A_1, A_2, A_3 gegenüberliegenden Winkel resp. mit w_1, w_2, w_3. Ferner setzen wir

$$\varrho = \frac{g_2 - g_1}{g_3 - g_1}, \qquad \zeta = \frac{1}{\pi}(w_3 + \varrho \cdot w_2),$$

$$b = \beta_3 - \beta_1 - \frac{\beta_2 - \beta_1}{\varrho}, \qquad \omega = \frac{1}{2\pi}(\pi - \pi\zeta + (b + \pi)\,\varrho).$$

Offenbar gilt stets

$$0 < \varrho < 1, \quad 0 < \zeta < 1.$$

Wählt man andererseits irgendwie zwei Zahlen ϱ' und ζ', welche die Ungleichungen

$$0 < \varrho' < 1, \quad 0 < \zeta' < 1$$

befriedigen, so können

$$A_1, A_2, A_3, \; g_1, g_2, g_3$$

so bestimmt werden, daß sie den am Anfang von § 17 A genannten Bedingungen genügen und $\varrho = \varrho'$, $\zeta = \zeta'$ liefern.

In dem Falle, wo ϱ eine Rationalzahl ist, benutzen wir noch folgende Bezeichnungen: Wir setzen $\varrho = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}}$, wobei $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind. Wir bezeichnen ferner mit H die Anzahl der *zwischen* $\mathfrak{n} \cdot \omega$ und $\mathfrak{n} \cdot (\omega + \zeta)$ liegenden ganzen Zahlen und mit h die Anzahl der mit $\mathfrak{n} \cdot \omega$ oder $\mathfrak{n} \cdot (\omega + \zeta)$ zusammenfallenden ganzen Zahlen.

Der Ausdruck $\frac{\chi(t)}{t}$ strebt, wenn t unbeschränkt wächst, nach einer endlichen Grenze, so daß stets eine charakteristische Zahl existiert. Dieselbe ist, falls ϱ eine Irrationalzahl darstellt, gleich

$$\zeta \cdot (g_3 - g_1) + g_1 = \frac{1}{\pi} (g_1 \cdot w_1 + g_2 w_2 + g_3 \cdot w_3), \tag{81.}$$

falls aber ϱ eine Rationalzahl darstellt, gleich

$$\frac{g_3 - g_1}{2\mathfrak{n}} \cdot (h + 2H) + g_1 . \tag{82.}$$

Was die Frage nach der Existenz einer mittleren Bewegung betrifft, so hängt die Antwort auf dieselbe nur von den Größen ϱ und ζ ab. Im besonderen existiert stets eine mittlere Bewegung, wenn ϱ eine Rationalzahl ist. Sind die positiven Größen ϱ_0 und ζ_0 kleiner als **1**, *sonst beliebig gewählt, so gibt es in beliebiger Nähe von ϱ_0 solche Zahlen $\varrho_0 + \varepsilon$, daß keine mittlere Bewegung existiert, wenn $\zeta = \zeta_0$, $\varrho = \varrho_0 + \varepsilon$ ist**).

---

*) In beliebiger Nähe von ϱ_0 gibt es natürlich auch solche Zahlen $\varrho_0 + \varepsilon$, daß eine mittlere Bewegung existiert, wenn $\zeta = \zeta_0$, $\varrho = \varrho_0 + \varepsilon$ ist. Dies folgt schon aus dem Umstand, daß ein rationales ϱ stets die Existenz einer mittleren Bewegung zur Folge hat.

Beim Beweise dieses Theorems stützen wir uns auf die in unserem Kapitel bisher gewonnenen Ergebnisse und im besonderen auf die im § 15 begonnenen Untersuchungen. Wir setzen $A=A_1$, $B=A_2$, $C=A_3$; dann genügen A, B, C den in § 12 gegebenen Bedingungen und wir haben $\beta=w_2$, $\gamma=w_3$.

Der Punkt w möge nun auf seiner Ebene eine Bewegung ausführen, welche durch die Gleichungen

$$(83.) \qquad x=(g_2-g_1)\,\tau+\beta_2-\beta_1, \qquad y=(g_3-g_1)\,\tau+\beta_3-\beta_1$$

dargestellt wird. Hierbei mißt τ die Zeit und die Bewegung beginnt im Moment $\tau=\tau_0$. Der Punkt w bewegt sich dann auf einer Geraden Λ, deren Richtungskoeffizient gleich

$$\frac{g_3-g_1}{g_2-g_1}=\frac{1}{\varrho}$$

ist. Da

$$\pi-w_3=w_1+w_2>w_2$$

gilt, so ist

$$\frac{w_2}{\pi-w_3}<1.$$

Wie schon früher bemerkt, haben wir $0<\varrho<1$. Somit gilt

$$(84.) \qquad \frac{1}{\varrho}>\frac{w_2}{\pi-w_3}.$$

Die Gerade Λ genügt daher den Bedingungen, durch welche in § 15 A die Wahl der Geraden L beschränkt wurde. Wählen wir als Gerade L die Gerade Λ, so entsprechen den Größen μ und y_0 jetzt die Größen $\frac{1}{\varrho}$ und b. Der Punkt w führt seine Bewegung aus, indem er von einem Punkte der Geraden Λ ausgeht und sich so bewegt, daß y unbeschränkt wächst. In analoger Weise stellten wir uns in § 15 A die Bewegung des Punktes w vor; die dort begonnenen Untersuchungen beziehen sich daher auch auf den von uns gegenwärtig betrachteten Fall der Bewegung von w. Der am

Schluß von § 16 B formulierte Satz ergibt jetzt folgendes Resultat: Hat y seit dem Anfang der Bewegung den positiven Zuwachs Δy erfahren, so ist der entsprechende Zuwachs von φ, abgesehen von einem Summanden, der bei unbeschränktem Wachstum von y zwischen endlichen Grenzen bleibt, gleich

$$2\pi \cdot \Phi\left(\omega, \zeta, \varrho, g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)\right) + \theta \cdot \Delta y. \tag{85.}$$

Hierbei bedeutet θ die Zahl 0, wenn ϱ irrational ist, dagegen die Größe $\frac{h}{2\pi}$, wenn ϱ rational ist. Die charakteristische Zahl von

$$\Phi\left(\omega, \zeta, \varrho, g\left(\frac{\Delta y}{2\pi}\right)\right)$$

ist für ein irrationales ϱ gleich ζ, für ein rationales ϱ aber gleich $\frac{H}{n}$.

Ein Blick auf die Gleichungen (80.) lehrt nun, daß $f(\tau)^*)$ einer der φ-Werte ist, welche der von w in dem durch τ charakterisierten Zeitmoment eingenommenen Position entsprechen. Beachtet man ferner die Stetigkeit von $f(t)$, so ergibt sich

$$\Delta\varphi = f(\tau_0 + \Delta\tau) - f(\tau_0).$$

Hierbei bedeutet $\Delta\varphi$ den Zuwachs, welchen φ erfahren hat, wenn der Punkt w seine Bewegung vom Moment τ_0 bis zu irgend einem späteren Moment $\tau_0 + \Delta\tau$ ausgeführt hat. In diesem letzteren Fall hat y den Zuwachs

$$\Delta y = (g_3 - g_1)\,\Delta\tau$$

erlitten; mit Rücksicht auf (85.) können wir also schreiben

---

*) S. den Schluß von § 17 A. Wir denken uns eine der χ-Funktionen fest gewählt.

$$(86.)\quad f(\tau_0+\Delta\tau)-f(\tau_0)$$
$$=2\pi\,\Phi\left(\omega,\zeta,\varrho,g\left(\frac{g_3-g_1}{2\pi}\cdot\Delta\tau\right)\right)+\theta\cdot(g_3-g_1)\cdot\Delta\tau+\varepsilon,$$

wobei ε eine Größe bezeichnet, die zwischen endlichen Grenzen bleibt, wenn $\Delta\tau$ unbegrenzt wächst. Da

$$f(\tau_0+\Delta\tau)-f(\tau_0)=\chi(\tau_0+\Delta\tau)-\chi(\tau_0)-g_1\cdot\Delta\tau,$$

so haben wir

$$(87.)\quad \chi(\tau_0+\Delta\tau)=2\pi\,\Phi\left(w,\zeta,\varrho,g\left(\frac{g_3-g_1}{2\pi}\cdot\Delta\tau\right)\right)$$
$$+[g_1+(g_3-g_1)\,\theta]\cdot\Delta\tau+\eta.$$

Hierbei ist η eine Größe, die zwischen endlichen Grenzen bleibt, wenn $\Delta\tau$ unbegrenzt wächst.

Nach § 16 A existiert offenbar

$$\lim_{\Delta\tau\to\infty}\frac{\Phi\left(\omega,\zeta,\varrho,g\left(\frac{g_3-g_1}{2\pi}\cdot\Delta\tau\right)\right)}{g\left(\frac{g_3-g_1}{2\pi}\cdot\Delta\tau\right)},$$

und zwar ist dieser Grenzwert im Falle eines irrationalen ϱ gleich ζ, im Falle eines rationalen ϱ aber gleich $\frac{H}{n}$. Ferner haben wir

$$\lim_{\Delta\tau\to\infty}\left(\frac{g\left(\frac{g_3-g_1}{2\pi}\cdot\Delta\tau\right)}{\tau_0+\Delta\tau}\right)=\frac{g_3-g_1}{2\pi}.$$

Somit existiert

$$\lim_{\Delta\tau\to\infty}\left[\frac{\chi(\tau_0+\Delta\tau)}{\tau_0+\Delta\tau}\right],$$

und zwar ist dieser Grenzwert für ein irrationales ϱ gleich

$$2\pi \cdot \zeta \cdot \frac{g_3 - g_1}{2\pi} + g_1 = \zeta \cdot (g_3 - g_1) + g_1 = \frac{1}{\pi}(g_1 \cdot w_1 + g_2 \cdot w_2 + g_3 \cdot w_3).$$

Für ein rationales ϱ ist aber dieser Grenzwert gleich

$$2\pi \cdot \frac{H}{\mathfrak{n}} \frac{g_3 - g_1}{2\pi} + g_1 + (g_3 - g_1)\,\theta = \frac{g_3 - g_1}{2\mathfrak{n}} \cdot (2H + h) + g_1.$$

Damit ist der erste Teil unseres Theorems bewiesen. Um den zweiten Teil unseres Satzes zu begründen, wollen wir uns zunächst davon überzeugen, daß eine mittlere Bewegung existiert oder nicht existiert, je nachdem $\Phi(\omega, \zeta, \varrho, n)$ linearen Charakter besitzt oder nicht.

Wir entwickeln *erstens* gewisse Folgerungen, die sich an die Annahme knüpfen, daß eine mittlere Bewegung existiert. In diesem Fall gibt es, wie wir auf Grund von (87.) schließen, eine solche Konstante $\varkappa$, daß

$$(88.) \qquad \Phi\left(\omega, \zeta, \varrho, g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi} \cdot \Delta\tau\right)\right) - \varkappa \cdot \Delta\tau$$

zwischen endlichen Grenzen bleibt, wenn $\Delta\tau$ unbegrenzt wächst. Hieraus folgt, daß auch

$$(89.) \qquad \Phi\left(\omega, \zeta, \varrho, g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi} \cdot \Delta\tau\right)\right) - \varkappa_1 \cdot g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi} \cdot \Delta\tau\right)$$

bei unbegrenzt wachsendem $\Delta\tau$ zwischen endlichen Grenzen bleibt, falls die Konstante $\varkappa_1$ geeignet gewählt ist. Beginnt $\Delta\tau$ sein Wachstum bei einem genügend kleinen positiven Wert, so nimmt

$$g\left(\frac{g_3 - g_1}{2\pi} \cdot \Delta\tau\right)$$

hierbei der Reihe nach die Werte $1, 2, 3, 4, \ldots$ an. Aus dem gesagten folgt unmittelbar, daß $\Phi(\omega, \zeta, \varrho, n)$ linearen Charakter besitzt.

Wir entwickeln andererseits *zweitens* Folgerungen, die sich an die Annahme knüpfen, daß $\Phi(\omega, \zeta, \varrho, n)$ linearen Charakter besitzt. In diesem Fall bleibt offenbar der Ausdruck (89.) bei unbegrenzt wachsendem $\Delta\tau$ zwischen endlichen Grenzen, falls man in dem genannten Ausdruck $\varkappa_1$ durch eine geeignet gewählte Konstante ersetzt. Dasselbe gilt daher auch von dem Ausdruck (88.), falls $\varkappa$ durch eine geeignete Konstante ersetzt wird. Beachten wir nun (87.), so erkennen wir leicht die Existenz einer mittleren Bewegung.

Nunmehr ist es in der Tat klar, daß eine mittlere Bewegung existiert oder nicht existiert, je nachdem $\Phi(\omega, \zeta, \varrho, n)$ linearen Charakter besitzt oder nicht. Indem wir uns auf dieses Ergebnis stützen und die in § 16 A zusammengestellten Bemerkungen beachten, erkennen wir die Richtigkeit auch des zweiten Teiles unseres Theorems.

§ 18.

A. Sind in den Ausdrücken (76.) aus § 17 A die den daselbst angegebenen Bedingungen genügenden Konstanten auf Grund experimenteller Daten bestimmt, so ist es nach dem vorhergehenden im allgemeinen nicht möglich, die Existenz einer mittleren Bewegung festzustellen oder auszuschließen. Haben wir nämlich

$$\zeta = \zeta_0, \quad \varrho = \varrho_0$$

gefunden, so hat die bei den Beobachtungsresultaten stattfindende Unsicherheit meistens zur Folge, daß auch

$$\zeta = \zeta_0, \quad \varrho = \varrho_0 + \varepsilon$$

zulässige Werte sind, wobei ε absolut genügend klein, sonst beliebig ist. Nach dem vorhergehenden kann aber ε einerseits so gewählt werden, daß eine mittlere Bewegung existiert, andererseits so, daß eine mittlere Bewegung nicht existiert. Immerhin ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß die Vorschriften, nach welchen die Konstanten der Ausdrücke (76.)

bestimmt werden, aus theoretischen Gründen eine Entscheidung der Frage gestatten, ob eine mittlere Bewegung existiert oder nicht. Wir wollen daher das von uns behandelte, in der Theorie der säkularen Störungen vorkommende Problem nach dieser Richtung untersuchen. Wir werden hierbei zu folgendem Resultat gelangen:

Bildet man die Gleichungen α) *oder* β) *der Einleitung für den Fall dreier Planeten nach den Vorschriften von Laplace auf Grund von experimentellem Material und genügen die Konstanten* N_0, N_1, N_2 *oder* M_0, M_1, M_2 *den Bedingungen*

$$0 < 2\,|N_\mu| < |N_0| + |N_1| + |N_2|$$

bzw.

$$0 < 2\,|M_\mu| < |M_0| + |M_1| + |M_2|,$$

so ist eine Entscheidung der Frage bezüglich der Existenz einer mittleren Bewegung unmöglich:

B. Der Zentralkörper von der Masse M **möge von drei Planeten mit den Massen** m, m', m'' **in gleichem Sinne umkreist werden. Die halben großen Achsen seien** a, a', a'' **und es gelte** $a < a' < a''$. *Laplace* **bezeichnet**

$$(90.) \qquad (0,1) = -\frac{3m' \cdot n \cdot a^2 \cdot a' \cdot (a, a')'}{4\,(a'^2 - a^2)^2},$$

$$(91.) \qquad \boxed{0,1} = -\frac{3m'\,a\,n\,[(a^2 + a'^2) \cdot (a, a')' + a\,a' \cdot (a, a')]}{2\,(a'^2 - a^2)^2};$$

hierbei ergeben sich (a, a') **und** $(a, a')'$ **aus der Entwicklung**

$$(92.) \qquad (a^2 - 2\,a\,a'\cos\theta + a'^2)^{-1/2} = (a, a') + (a, a')'\cos\theta + (a, a')''\cos 2\theta \text{ usw.}$$

und n^2 **wird gleich** $\frac{M}{a^3}$ **gesetzt, was die Vernachlässigung von** m **gegenüber** M **mit sich bringt. Die übrigen** *Laplace***schen Symbole** $(0,2)$, $(1,0)$, $(1,2)$ **usw. werden analog definiert. Endlich sei**

$$(93.) \qquad [\mu,\mu] = (\mu,0) + (\mu,1) + (\mu,2), \qquad (\mu = 0,1,2)$$

wobei $(\mu,\mu) = 0$ zu setzen ist. Die „Säkulargleichungen“ nehmen dann folgende Gestalt an

$$(94.) \qquad \begin{vmatrix} u-[0,0] & \boxed{0,1} & \boxed{0,2} \\ \boxed{1,0} & u-[1,1] & \boxed{1,2} \\ \boxed{2,0} & \boxed{2,1} & u-[2,2] \end{vmatrix} = 0,$$

$$(95.) \qquad \begin{vmatrix} -\omega-[0,0] & (0,1) & (0,2) \\ (1,0) & -\omega-[1,1] & (1,2) \\ (2,0) & (2,1) & -\omega-[2,2] \end{vmatrix} = 0.$$

Jede dieser Gleichungen besitzt nur reelle und voneinander verschiedene Wurzeln*). Diese Aussage bleibt auch bestehen, wenn wir an Stelle von m, m', m'' die positiven Zahlen m_1, m_1', m_1'' setzen.

Ersetzt man in der linken Seite von (94.) m' und m'' durch $m' \cdot x$ und $m'' \cdot x$, so erhält man einen Ausdruck, den wir mit $G(u,x)$ bezeichnen wollen. Offenbar gilt

$$(96.) \qquad G(u,0) = u(u-r_0)(u-s_0),$$

wobei

$$(97.) \quad r_0 = -\frac{3m\sqrt{M}\cdot\sqrt{a'}\cdot a\cdot(a,a')'}{4(a^2-a'^2)^2}, \qquad s_0 = -\frac{3m\sqrt{M}\cdot\sqrt{a''}\cdot a\cdot(a,a'')'}{4(a^2-a''^2)^2}$$

gesetzt worden ist.

Ersetzt man in der *linken* Seite von (94.) m und m'' durch $m \cdot y$ und $m'' \cdot y$, so erhält man einen Ausdruck, den wir mit $H(u,y)$ bezeichnen wollen. Offenbar gilt

*) Daß die Wurzeln voneinander verschieden sind, hat *Seeliger* bewiesen. S. Astron. Nachr. Nr. 2231. Es ist ferner bekannt, daß die Wurzeln von (94.) alle positiv sind, während von den Wurzeln von (95.) keine positiv ist.

$$(98.) \qquad H(u,0) = u(u-r_1)(u-s_1),$$

wobei

$$(99.) \quad r_1 = -\frac{3m'\sqrt{M}\sqrt{a''}\cdot a'\cdot(a',a'')'}{4(a'^2-a''^2)^2}, \quad s_1 = -\frac{3m'\sqrt{M}\sqrt{a}\,a'\cdot(a,a')'}{4(a'^2-a^2)^2}.$$

Ersetzt man in der linken Seite von (94.) m und m' durch $m\cdot z$ und $m'\cdot z$, so erhält man einen Ausdruck, den wir mit $K(u,z)$ bezeichnen wollen. Offenbar gilt

$$(100.) \qquad K(u,0) = u(u-r_2)(u-s_2),$$

wobei

$$(101.) \quad r_2 = -\frac{3m''\sqrt{M}\sqrt{a}\,a''(a,a'')'}{4(a''^2-a^2)^2}, \quad s_2 = -\frac{3m''\sqrt{M}\sqrt{a'}\,a''(a',a'')'}{4(a''^2-a'^2)^2}.$$

Nach *Laplace* gilt, wenn $a<a'$ ist und $\frac{a}{a'}=\alpha$ gesetzt wird,

$$(102.) \qquad (a,a')' = -\frac{a'}{3}(1-\alpha^2)^2\, b^{(1)}_{\frac{3}{2}},$$

wobei $b^{(1)}_{\frac{3}{2}}$ nach der Formel

$$(103.) \quad b^{(1)}_s = 2\alpha\left[s + s\cdot\frac{s\cdot(s+1)}{1\cdot 2}\alpha^2 + \frac{s(s+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{s(s+1)\,(s+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^4 + \cdots\right]$$

zu berechnen ist. Um die Abhängigkeit der Größe $b^{(1)}_{\frac{3}{2}}$ von α, welches stets dem Gebiet $0<\alpha<1$ angehören soll, hervortreten zu lassen, schreiben wir $b^{(1)}_{\frac{3}{2}} = f(\alpha)$. Aus (103.) folgt, daß $f(\alpha)$ größer als Null ist und mit zunehmendem α wächst. Wir haben nun, wie leicht zu sehen

$$(104.) \quad \begin{cases} r_0 = \dfrac{m\cdot\sqrt{M}\cdot a}{4(a')^{5/2}} f\left(\dfrac{a}{a'}\right), & s_0 = \dfrac{m\cdot\sqrt{M}\cdot a}{4(a'')^{5/2}} f\left(\dfrac{a}{a''}\right), \\ r_1 = \dfrac{m'\cdot\sqrt{M}\cdot a'}{4(a'')^{5/2}} f\left(\dfrac{a'}{a''}\right), & s_1 = \dfrac{m'\sqrt{M}\sqrt{a}}{4(a')^2} f\left(\dfrac{a}{a'}\right), \\ r_2 = \dfrac{m''\sqrt{M}\sqrt{a}}{4(a'')^2} f\left(\dfrac{a}{a''}\right), & s_2 = \dfrac{m''\sqrt{M}\sqrt{a'}}{4(a'')^2} f\left(\dfrac{a'}{a''}\right). \end{cases}$$

Aus dem gesagten folgt

$$(105.) \qquad r_0 > s_0 > 0, \qquad 0 < r_2 < s_2.$$

Die drei Wurzeln von $G(u, x) = 0$ für ein der Bedingung $0 < x \leqq 1$ genügendes x bezeichnen wir mit

$$\varphi_1(x), \psi_1(x), \chi_1(x).$$

Die Bezeichnung sei hierbei so gewählt, daß

$$\varphi_1(x) < \psi_1(x) < \chi_1(x).$$

Offenbar gilt

$$(106.) \qquad \lim_{x \to 0} \varphi_1(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0} \psi_1(x) = s_0, \quad \lim_{x \to 0} \chi_1(x) = r_0.$$

Die drei Wurzeln von $K(u, z) = 0$ für ein der Bedingung $0 < z \leqq 1$ genügendes z bezeichnen wir mit $\varphi_3(z)$, $\psi_3(z), \chi_3(z)$. Die Bezeichnung sei hierbei so gewählt, daß $\varphi_3(z) < \psi_3(z) < \chi_3(z)$. Dann gilt

$$(107.) \qquad \lim_{z \to 0} \varphi_3(z) = 0, \quad \lim_{z \to 0} \psi_3(z) = r_2, \quad \lim_{z \to 0} \chi_3(z) = s_2.$$

Die drei Wurzeln von $H(u, y) = 0$ für ein der Bedingung $0 < y \leqq 1$ genügendes y bezeichnen wir mit $\varphi_2(y), \psi_2(y), \chi_2(y)$. Die Bezeichnung sei hierbei so gewählt, daß $\varphi_2(y) < \psi_2(y) < \chi_2(y)$. Es gilt dann mindestens eine der folgenden beiden Reihen

$$(108.) \qquad \lim_{y \to 0} \varphi_2(y) = 0, \quad \lim_{y \to 0} \psi_2(y) = r_1, \quad \lim_{y \to 0} \chi_2(y) = s_1;$$

$$(109.) \qquad \lim_{y \to 0} \varphi_2(y) = 0, \quad \lim_{y \to 0} \psi_2(y) = s_1, \quad \lim_{y \to 0} \chi_2(y) = r_1.$$

Die Wurzeln der Gleichung (94.) mögen mit k_1, k_2, k_3 bezeichnet werden, und zwar führen wir diese Bezeichnung in der Weise ein, daß $k_1 < k_2 < k_3$ ist.

Wie man auch drei Intervalle aus den Gebieten

$$0<x\leqq 1,\ 0<y\leqq 1,\ 0<z\leqq 1$$

auswählen möge, es kann nicht für alle diesen Intervallen angehörenden x, y, z

$$\text{(110.)}\qquad \frac{k_2-k_1}{k_3-k_1}=\frac{\psi_1(x)-\varphi_1(x)}{\chi_1(x)-\varphi_1(x)}=\frac{\psi_2(y)-\varphi_2(y)}{\chi_2(y)-\varphi_2(y)}=\frac{\psi_3(z)-\varphi_3(z)}{\chi_3(z)-\varphi_3(z)}$$

gelten.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung zu beweisen, nehmen wir an, sie sei in einem Fall nicht zutreffend. Dann müßte, wie leicht zu sehen, (110.) für alle den Gebieten

$$0<x\leqq 1,\ 0<y\leqq 1,\ 0<z\leqq 1$$

angehörenden x, y, z gelten. Indem wir x, y, z nach 0 konvergieren lassen, erkennen wir weiter, daß dann mindestens eine der folgenden zwei Reihen gelten muß

$$\text{(111.)}\qquad \frac{k_2-k_1}{k_3-k_1}=\frac{s_0}{r_0}=\frac{r_2}{s_2}=\frac{r_1}{s_1},$$

$$\text{(112.)}\qquad \frac{k_2-k_1}{k_3-k_1}=\frac{s_0}{r_0}=\frac{r_2}{s_2}=\frac{s_1}{r_1}.$$

Aus $\frac{s_0}{r_0}=\frac{r_2}{s_2}$ folgt aber mit Rücksicht auf (104.) $r_1=s_1$, was sowohl mit (111.) als mit (112.) nicht verträglich ist. Unsere Behauptung ist daher bewiesen.

Wir erkennen nunmehr ohne weiteres die Richtigkeit folgender Aussage: *Man kann drei positive Zahlen μ, μ', μ'' so angeben, daß sie sich von m, m', m'' beliebig wenig unterscheiden und*

$$\text{(113.)}\qquad \frac{k_2-k_1}{k_3-k_1}\neq\frac{u_2-u_1}{u_3-u_1}$$

ergeben. Hierbei bezeichnen u_1, u_2, u_3 die Wurzeln von (94.), *wenn m, m', m'' durch μ, μ', μ'' ersetzt werden; und zwar ist die Bezeichnung so gewählt, daß $u_1<u_2<u_3$. Es mögen nun in der Gleichung* (94.) *m, m', m'' durch*

$$m+\vartheta(\mu-m),\ m'+\vartheta(\mu'-m'),\ m''+\vartheta(\mu''-m'')$$

ersetzt werden, wobei $0 \leqq \vartheta \leqq 1$, *und man bezeichne darauf die drei Wurzeln von* (94.) *mit* $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ *in der Weise,* **daß** $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$ *gilt. Man kann dann* ϑ *so bestimmen, daß* $\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_3-\omega_1}$ *irgend einen zwischen* $\frac{k_2-k_1}{k_3-k_1}$ *und* $\frac{u_2-u_1}{u_3-u_1}$ *gewählten Wert annimmt.*

C. Ehe wir weitergehen, müssen wir noch einiges aus der „Mechanik des Himmels" von *Laplace* anführen. Bezeichnet man mit e, e', e'', $\omega, \omega', \omega''$ **die Exzentrizitäten und Perihellängen, setzt man ferner**

$$\begin{aligned} h &= e \sin \omega, & h' &= e' \sin \omega', & h'' &= e'' \sin \omega'', \\ l &= e \cos \omega, & l' &= e' \cos \omega', & l'' &= e'' \cos \omega'', \end{aligned}$$

so gilt

$$(114.)\quad \left\{\begin{aligned} h &= N \sin(gt+\beta) + N_1 \sin(g_1 t+\beta_1) + N_2 \sin(g_2 t+\beta_2), \\ l &= N \cos(gt+\beta) + N_1 \cos(g_1 t+\beta_1) + N_2 \cos(g_2 t+\beta_2), \\ h' &= N' \sin(gt+\beta) + N_1' \sin(g_1 t+\beta_1) + N_2' \sin(g_2 t+\beta_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ l'' &= N'' \cos(gt+\beta) + N_1'' \cos(g_1 t+\beta_1) + N_2'' \cos(g_2 t+\beta_2). \end{aligned}\right.$$

Hierbei sind g, g_1, g_2 **die voneinander verschiedenen reellen Wurzeln der Gleichung (94.). Wir wählen die Bezeichnung so, daß** $g < g_1 < g_2$. **Ferner werden die Verhältnisse der** N, N', N'' **durch die Gleichungen**

$$(115.)\quad \left\{\begin{aligned} (g-[0,0])N + \boxed{0,1}N' + \boxed{0,2}N'' &= 0, \\ \boxed{1,0}N + (g-[1,1])N' + \boxed{1,2}N'' &= 0, \\ \boxed{2,0}N + \boxed{2,1}N' + (g-[2,2])N'' &= 0 \end{aligned}\right.$$

bestimmt. Die Verhältnisse der N_1, N_1', N_1'' **sowie der** N_2, N_2', N_2'' **gehen aus Gleichungen hervor, welche (115.) analog gebildet sind und sich auf die Wurzeln** g_1 **und** g_2 **beziehen. Die Bestimmung der Größen**

$$N, N_1, N_2, N', \ldots N_2'', \beta, \beta_1, \beta_2$$

erfolgt unter Beachtung des soeben gesagten auf Grund der Werte, welche

$$h, h', h'', l, l', l''$$

für $t = t_0$ annehmen. Dieses Verfahren ergibt für

$$N\cos\beta,\ N\sin\beta,\ N_1\cos\beta_1,\ N_1\sin\beta_1,\ N_2\cos\beta_2,\ N_2\sin\beta_2,$$
$$N'\cos\beta,\ N'\sin\beta,\ \ldots\ N_2''\cos\beta_2,\ N_2''\sin\beta_2$$

eindeutig bestimmte Werte.

Es seien nun

$$\overline{a}, \overline{a}', \overline{a}'',\ \underline{h} + \delta h,\ \underline{h}' + \delta h',\ \underline{h}'' + \delta h'',\ \underline{l} + \delta l,\ \underline{l}' + \delta l',\ \underline{l}'' + \delta l'',$$
$$\overline{m} + \delta m,\ \overline{m}' + \delta m',\ \overline{m}'' + \delta m''$$

solche Werte von

$$a, a', a'',\ h, h', h'',\ l, l', l'',\ m, m', m'',$$

daß sie für $t = t_0$ als mit den Beobachtungen verträglich zuzulassen sind, falls

$$\delta h, \delta h', \delta h'',\quad \delta l, \delta l', \delta l'',\ \delta m, \delta m', \delta m''$$

absolut genügend klein, etwa kleiner als $d > 0$, sind. Es gelte

$$\overline{a} < \overline{a}' < \overline{a}''.$$

Wenn im folgenden von den Werten irgend eines Systems von Größen gesagt wird, sie seien mit den Beobachtungen verträglich, so findet dabei stets folgendes statt: Die genannten Werte sind vereinbar mit der Annahme, daß für $t = t_0$

$$a = \overline{a},\ a' = \overline{a}',\ a'' = \overline{a}'',\ h = \underline{h} + \delta h_0,\ h' = \underline{h}' + \delta h_0',\ h'' = \underline{h}'' + \delta h_0'',$$
$$l = \underline{l} + \delta l_0,\ l' = \underline{l}' + \delta l_0',\ l'' = \underline{l}'' + \delta l_0'',$$
$$m = \overline{m} + \delta m_0,\ m' = \overline{m}' + \delta m_0',\ m'' = \overline{m}'' + \delta m_0''$$

gilt, wenn nur die

$$\delta h_0,\ \delta h_0',\ \delta h_0'',\ \delta l_0,\ \delta l_0',\ \delta l_0'',\ \delta m_0,\ \delta m_0',\ \delta m_0''$$

in geeigneter Weise so gewählt werden, daß ihre Absolutwerte kleiner als d sind. Auf diesen Umstand müssen wir im Hinblick auf das Folgende besonders hinweisen. Die Wurzeln von (94.) für

$$a=\bar{a},\ a'=\bar{a}',\ a''=\bar{a}'',\ m=\bar{m},\ m'=\bar{m}',\ m''=\bar{m}'',$$

seien

$$\bar{g},\ \bar{g}_1,\ \bar{g}_2,$$

wobei die Bezeichnung so gewählt ist, daß

$$\bar{g}<\bar{g}_1<\bar{g}_2.$$

Endlich sollen

$$\bar{N},\bar{N}_1,\bar{N}_2,\ \ \bar{N}',\bar{N}_1',\bar{N}_2',\ \ \bar{N}'',\bar{N}_1'',\bar{N}_2'',\ \ \bar{\beta},\bar{\beta}_1,\bar{\beta}_2$$

solche Werte sein, daß sowohl die Gleichungen (114.) für $t=t_0$ als auch die Gleichungen (115.) und die analogen erfüllt sind, wenn man

$$h=\underline{h},\ h'=\underline{h}',\ldots l''=\underline{l}'',\ g=\bar{g},\ g_1=\bar{g}_1,\ g_2=\bar{g}_2,\ \beta=\bar{\beta},\ \beta_1=\bar{\beta}_1,\ \beta_2=\bar{\beta}_2,$$
$$a=\bar{a},\ a'=\bar{a}',\ a''=\bar{a}'',\ m=\bar{m},\ m'=\bar{m}',\ m''=\bar{m}'',\ N=\bar{N},\ N_1=\bar{N}_1,\ldots N_2''=\bar{N}_2''$$

setzt. *Wir setzen voraus, daß*

$$\bar{N},\ \bar{N}_1,\ \bar{N}_2$$

den Bedingungen

$$\text{(116.)}\qquad \begin{cases} 0<2|\bar{N}|<|\bar{N}|+|\bar{N}_1|+|\bar{N}_2|, \\ 0<2|\bar{N}_1|<|\bar{N}|+|\bar{N}_1|+|\bar{N}_2|, \\ 0<2|\bar{N}_2|<|\bar{N}|+|\bar{N}_1|+|\bar{N}_2| \end{cases}$$

genügen.

Es sei auf der linken Seite von (94.)

$$a=\bar{a},\ a'=\bar{a}',\ a''=\bar{a}''.$$

Man ersetze ferner u durch die größte Wurzel der Gleichung (94.). Es können dann nicht alle diejenigen Unterdeterminanten verschwinden, welche den Gliedern der von links oben nach rechts unten gezogenen Diagonale entsprechen; andernfalls hätten wir eine mehrfache Wurzel, was dem obigen widerspricht. Ist eine der genannten Unterdeterminanten für

$$m = \overline{m},\ m' = \overline{m}',\ m'' = \overline{m}''$$

von Null verschieden, so ist sie es auch für solche

$$m,\ m',\ m'',$$

welche sich von

$$\overline{m},\ \overline{m}',\ \overline{m}''$$

genügend wenig unterscheiden. Dieselben Aussagen gelten, wenn wir u nicht durch die größte, sondern durch die kleinste oder mittlere Wurzel von (94.) ersetzen.

Wir wenden uns nun den Gleichungen (115.) zu und setzen in denselben

$$a = \overline{a},\ a' = \overline{a}',\ a'' = \overline{a}''$$*).

Aus den Gleichungen (115.) folgt unter Berücksichtigung des soeben gesagten für diejenigen m, m', m'', welche $\overline{m}, \overline{m}', \overline{m}''$ genügend nahe liegen,

$$(117.) \qquad N = \gamma \cdot N^{(\nu)}, \quad N' = \gamma' \cdot N^{(\nu)}, \quad N'' = \gamma'' \cdot N^{(\nu)}.$$

Hierbei ist $N^{(\nu)}$ eine der Größen N, N', N'', und zwar dieselbe Größe für alle in Betracht gezogenen m, m', m''. $\gamma, \gamma', \gamma''$ sind stetige Funktionen von m, m', m''. Für

$$m = \overline{m},\ m' = \overline{m}',\ m'' = \overline{m}''$$

muß γ von Null verschieden sein, da $\overline{N}$ von Null verschieden ist. Hieraus

*) Auch bei der Bestimmung von g sind diese Spezialwerte von a, a', a'' zu benutzen.

folgt, daß man schreiben kann:

$$(118.) \qquad N' = \left\{\frac{\bar{N}'}{\bar{N}}\right\} \cdot N, \qquad N'' = \left\{\frac{\bar{N}''}{\bar{N}}\right\} \cdot N.$$

Hierbei sind $\left\{\frac{\bar{N}'}{\bar{N}}\right\}$ und $\left\{\frac{\bar{N}''}{\bar{N}}\right\}$ stetige Funktionen von m, m', m''. Diese Funktionen sind für solche m, m', m'' definiert, welche $\bar{m}, \bar{m}', \bar{m}''$ genügend nahe liegen, und reduzieren sich für $m = \bar{m}$, $m' = \bar{m}'$, $m'' = \bar{m}''$ auf $\frac{\bar{N}'}{\bar{N}}$ und $\frac{\bar{N}''}{\bar{N}}$. Die Gleichungen (118.) gelten immer, wenn die Gleichungen (115.) erfüllt sind*). Jede Lösung von (115.) kann daher in der Form

$$(119.) \qquad N = c, \quad N' = \left\{\frac{\bar{N}'}{\bar{N}}\right\} \cdot c, \qquad N'' = \left\{\frac{\bar{N}''}{\bar{N}}\right\} \cdot c$$

dargestellt werden. Da aber (115.) unendlich viele voneinander verschiedene Lösungen besitzt, so stellt offenbar (119.) stets eine Lösung dar, wie auch c gewählt sein möge.

Vollständig analoge Bemerkungen können wir bezüglich der (115.) entsprechenden Gleichungen machen.

In den rechten Seiten von (114.) setzen wir

$$= t_0, \ \beta = \bar{\beta}, \ \beta_1 = \bar{\beta}_1, \ \beta_2 = \bar{\beta}_2.$$

Ferner mögen g, g_1, g_2 unter der Annahme

$$a = \bar{a}, \ a' = \bar{a}', \ a'' = \bar{a}''$$

berechnet sein. Für

$$N', N'', N_1', N_1'', N_2', N_2''$$

setzen wir die Größen

---

*) Dabei ist $a = \bar{a}$, $a' = \bar{a}'$, $a'' = \bar{a}''$ angenommen und man beschränkt sich auf solche m, m', m'', die $m, \bar{m}', \bar{m}''$ genügend nahe liegen.

$$(120.)\quad \left\{\frac{\overline{N}'}{\overline{N}}\right\}N,\ \left\{\frac{\overline{N}''}{\overline{N}}\right\}N,\ \left\{\frac{\overline{N}_1'}{\overline{N}_1}\right\}N_1,\ \left\{\frac{\overline{N}_1''}{\overline{N}_1}\right\}N_1,\ \left\{\frac{\overline{N}_2'}{\overline{N}_2}\right\}N_2,\ \left\{\frac{\overline{N}_2''}{\overline{N}_2}\right\}N_2,$$

indem wir m, m', m'' auf eine gewisse Umgebung von $\overline{m}, \overline{m}', \overline{m}''$ beschränken. Dann sind die Gleichungen (115.) und die analogen Gleichungen erfüllt. Die Größen (120.) kann man den Größen

$$\overline{N}', \overline{N}'', \overline{N}_1', \overline{N}_1'', \overline{N}_2', \overline{N}_2''$$

beliebig nahe bringen, wenn man

$$m, m', m'',\ N, N_1, N_2$$

den

$$\overline{m}, \overline{m}', \overline{m}'',\ \overline{N}, \overline{N}_1, \overline{N}_2$$

genügend nahe wählt; man kann daher durch dasselbe Mittel auch die rechten Seiten von (114.) den Werten

$$\underline{h}, \underline{l}, \underline{h}', \underline{l}', \underline{h}'', \underline{l}''$$

beliebig nahe bringen. *Es ist demnach klar, daß alle*

$$N, N_1, N_2,\ m, m', m''$$

mit den Beobachtungen verträglich sind, sofern nur die genannten Größen den Werten

$$\overline{N}, \overline{N}_1, \overline{N}_2,\ \overline{m}, \overline{m}', \overline{m}''$$

genügend nahe liegen.

D. **Es ist nach dem soeben gesagten möglich, eine positive Zahl q so anzugeben, daß folgendes gilt: Alle den Bedingungen**

$$(121.)\quad \begin{cases} |N-\overline{N}|<q,\ |N_1-\overline{N}_1|<q,\ |N_2-\overline{N}_2|<q, \\ |m-\overline{m}|<q,\ |m'-\overline{m}'|<q,\ |m''-\overline{m}''|<q \end{cases}$$

genügenden

$$N, N_1, N_2, \; m, m', m''$$

sind mit den Beobachtungen verträglich. Falls N, N_1, N_2 den Bedingungen (121.) genügen, so kann aus $|N|, |N_1|, |N_2|$ ein eigentliches Dreieck konstruiert werden.

Wir wollen in allen Fällen, wo aus $|N|, |N_1|, |N_2|$ ein eigentliches Dreieck konstruiert werden kann, die den Seiten $|N_1|$ und $|N_2|$ gegenüberliegenden Winkel mit v_1 und v_2 bezeichnen. Für $N = \overline{N}$, $N_1 = \overline{N}_1$, $N_2 = \overline{N}_2$ sei $v_1 = \overline{v}_1$ und $v_2 = \overline{v}_2$. Ist die positive Zahl $\varkappa$ genügend klein gewählt, so gilt offenbar folgende Aussage: Bedeutet v irgend eine der Bedingung $v - \overline{v}_2| < \varkappa$ genügende Zahl, so kann man die Größen N, N_1, N_2 so bestimmen, daß sie den Bedingungen (121.) genügen und

$$(122.) \qquad N = \overline{N}, \qquad v_1 = \overline{v}_1, \qquad v_2 = v$$

liefern.

Nach § 17 hängt die Frage nach der Existenz einer mittleren Bewegung der Apsidenlinie für den Planeten, auf welchen sich e und ω beziehen, nur von den Größen

$$(123.) \qquad \varrho = \frac{g_1 - g}{g_2 - g}, \qquad \zeta = \frac{1}{\pi}(v_2 + \varrho \cdot v_1)$$

ab, falls N, N_1, N_2 der Bedingung (121.) gemäß gewählt sind. Wir setzen

$$(124.) \qquad \overline{\varrho} = \frac{\overline{g}_1 - \overline{g}}{\overline{g}_2 - \overline{g}}, \qquad \overline{\zeta} = \frac{1}{\pi}(\overline{v}_2 + \overline{\varrho} \cdot \overline{v}_1),$$

wobei $\overline{g}, \overline{g}_1, \overline{g}_2$ die Werte von g, g_1, g_2 für

$$a = \overline{a}, \; a' = \overline{a}', \; a'' = \overline{a}'', \; m = \overline{m}, \; m' = \overline{m}', \; m'' = \overline{m}''$$

bedeuten.

Nach § 17 gibt es in beliebiger Nähe von $\overline{\varrho}$ solche Zahlen $\overline{\varrho} + \varepsilon$, daß keine mittlere Bewegung existiert, wenn $\zeta = \overline{\zeta}$, $\varrho = \overline{\varrho} + \varepsilon$ ist. Es gibt aber auch in beliebiger Nähe von $\overline{\varrho}$ solche Zahlen $\overline{\varrho} + \eta$, daß eine mittlere Bewegung existiert, wenn $\zeta = \overline{\zeta}$, $\varrho = \overline{\varrho} + \eta$ ist. Es ist nach § 17 ferner

klar, daß man noch die Bedingungen $\varepsilon > 0$ oder $\varepsilon < 0$ bzw. $\eta > 0$ oder $\eta < 0$ erfüllen kann.

Nunmehr benutzen wir das am Schluß des Abschnitts B unseres Paragraphen formulierte Resultat. Man kann hiernach die positiven Größen m_0, m_0', m_0'' so wählen, daß

$$|m_0 - m| < q,\ |m_0' - \overline{m}'| < q,\ |m_0'' - m''| < q$$

gilt und ferner

$$\frac{g_1^0 - g^0}{g_2^0 - g^0} \neq \frac{\overline{g}_1 - \overline{g}}{\overline{g}_2 - \overline{g}}$$

ist, falls g^0, g_1^0, g_2^0 die für

$$a = \overline{a},\ a' = \overline{a}',\ a'' = \overline{a}'',\ m = m_0,\ m' = m_0',\ m'' = m_0''$$

gebildeten g, g_1, g_2 bedeuten. Man kann ferner die m, m', m'' als positive Größen so bestimmen, daß sie sich um weniger als q von den $\overline{m}, \overline{m}', \overline{m}''$ unterscheiden und daß $\frac{g_1 - g}{g_2 - g}$ irgend einen zwischen

$$\frac{g_1^0 - g^0}{g_2^0 - g^0} \text{ und } \frac{\overline{g}_1 - \overline{g}}{\overline{g}_2 - \overline{g}}$$

gewählten Wert annimmt. Hierbei sind g, g_1, g_2 für $a = \overline{a},\ a' = \overline{a}',\ a'' = \overline{a}''$ und die gewählten m, m', m''-Werte zu berechnen.

Wir wählen nun ε' in der Weise, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Falls N, N_1, N_2 den Bedingungen (121.) entsprechen und $\varrho = \overline{\varrho} + \varepsilon',\ \zeta = \overline{\zeta}$ ist, besteht keine mittlere Bewegung.

2. ε' hat das Zeichen von

$$e = \frac{g_1^0 - g^0}{g_2^0 - g^0} - \frac{\overline{g}_1 - \overline{g}}{\overline{g}_2 - \overline{g}} = \frac{g_1^0 - g^0}{g_2^0 - g^0} - \overline{\varrho}.$$

3. Es ist $|\varepsilon'| < |e|,\ |\varepsilon'| < \frac{\varkappa}{\nu_1}$.

Die Zahl $v' = \overline{v}_2 - \varepsilon' \cdot \overline{v}_1$ genügt offenbar der Bedingung $|v' - \overline{v}_2| < \varkappa$. Es ist daher möglich*), die Größen ν, ν_1, ν_2 so zu bestimmen, daß sie den Bedingungen

$$(125.) \qquad |\nu - \overline{N}| < q, \ |\nu_1 - \overline{N}_1| < q, \ |\nu_2 - \overline{N}_2| < q$$

genügen und, falls $N = \nu$, $N_1 = \nu_1$, $N_2 = \nu_2$ gewählt wird,

$$(126.) \qquad N = \overline{N}, \ v_1 = \overline{v}_1, \ v_2 = v'$$

ergeben.

$\overline{\varrho} + \varepsilon'$ liegt nach dem vorhergehenden offenbar zwischen

$$\frac{g_1^0 - g^0}{g_2^0 - g^0} \text{ und } \frac{\overline{g}_1 - \overline{g}}{\overline{g}_2 - \overline{g}}.$$

Man kann daher nach dem obigen die positiven Größen M, M', M'', so bestimmen, daß sie sich um weniger als q von den $\overline{m}, \overline{m}', \overline{m}''$ unterscheiden und daß $\frac{g_1 - g}{g_2 - g}$ den Wert $\overline{\varrho} + \varepsilon'$ annimmt. Hierbei sind g, g_1, g_2 für

$$a = \overline{a}, \ a' = \overline{a}', \ a'' = \overline{a}'' \text{ und } m = M, \ m' = M', \ m'' = M''$$

zu berechnen.

Wählen wir nun

$$N = \nu, \ N_1 = \nu_1, \ N_2 = \nu_2, \ m = M, \ m' = M', \ m'' = M'',$$

so genügen die gewählten Werte den Gleichungen (121.) und sind somit mit den Beobachtungen verträglich. Aus $|N|, |N_1|, |N_2|$ kann ein eigentliches Dreieck konstruiert werden, und wir erhalten für den gewählten Fall, in welchem $a = \overline{a}$, $a' = \overline{a}'$, $a'' = \overline{a}''$ angenommen wird,

$$\varrho = \overline{\varrho} + \varepsilon', \qquad \zeta = \frac{1}{\pi}(v' + (\overline{\varrho} + \varepsilon')\,\overline{v}_1) = \frac{1}{\pi}(\overline{v}_2 + \overline{\varrho} \cdot \overline{v}_1) = \overline{\zeta}.$$

*) Siehe die Bemerkung, welche die Gleichungen (122.) enthält.

Es besteht daher für den gewählten Fall keine mittlere Bewegung.

In vollkommen analoger Weise beweist man, *daß mit den Beobachtungen auch ein Fall verträglich ist, in welchem eine mittlere Bewegung existiert.* Es genügt zu diesem Zweck, in dem ersten der drei ε' betreffenden Punkte das Wort „keine“ durch das Wort „eine“ zu ersetzen.

Handelt es sich nicht, wie im vorhergehenden, um die Apsidenlinie, sondern um die Knotenlinie, so genügen Betrachtungen, welche den oben angestellten durchaus analog sind, um auch in diesem Fall ein entsprechendes Resultat abzuleiten. Wir können daher die in dem Abschnitt A. unseres Paragraphen ausgesprochene Behauptung als bewiesen betrachten.

Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen.

Von Herrn *Axel Thue* in Kristiania.

Theorem I. Bedeutet ϱ eine positive Wurzel einer ganzen Funktion vom Grade r mit ganzen Koeffizienten, so hat die Relation

$$(1.) \qquad 0 < |q\varrho - p| < \frac{c}{q^{\frac{r}{2}+k}},$$

wo c und k zwei beliebig gegebene positive Größen bezeichnen, nicht unendlich viele Auflösungen in ganzen positiven Zahlen p und q.

Die Richtigkeit hiervon ergibt sich gleich, wenn $r = 1$ und wenn $r = 2$.

Wir brauchen folglich nur zu zeigen, daß der Satz immer richtig ist, wenn die genannte Funktion irreduktibel ist und $r > 2$.

Um dieses Ziel zu erreichen, wollen wir zuerst zwei Hilfssätze entwickeln.

Erster Hilfssatz. Es sei ϱ eine beliebige Wurzel einer ganzen irreduktiblen Funktion F mit ganzen Koeffizienten und vom Grade $r > 2$.

Es seien ferner θ eine beliebig gewählte positive Größe $> \frac{2}{r}$ und n eine solche beliebige ganze positive Zahl, daß

$$(2.) \qquad \frac{2}{r-2} - \frac{\theta}{n-1} > \omega,$$

wo ω eine beliebig gegebene positive Größe $< \frac{2}{r-2}$ bedeutet.

Es sei endlich m die positive ganze Zahl, die der Relation

$$(3.) \qquad m \leqq \left(\frac{r-2}{2} + \frac{1}{\theta}\right)(n-1) < m+1$$

Genüge leistet.

Man kann dann immer solche ganzen von der gewählten Wurzel ϱ unabhängigen Funktionen $f(x)$, $P(x)$ und $Q(x)$ von x mit ganzen Koeffizienten bestimmen und solche nur von F, θ und ω abhängigen positiven Größen S und T finden, daß

$$(4.) \quad \varrho\, Q(x) - P(x) = (\varrho - x)^n \left[f_1(x)\,\varrho^{r-1} + f_2(x)\,\varrho^{r-2} + \cdots + f_{r-1}(x)\,\varrho + f_r(x)\right] = (\varrho - x)^n R(x),$$

*wo der Grad von jeder Funktion f nicht größer als m, also der Grad von P und von Q nicht größer als $n+m$ wird, während der absolute Wert jedes Koeffizienten der Funktionen f kleiner als T^n und der absolute Wert jedes Koeffizienten von P und Q kleiner als S^n werden**).

Beweis. **Wenn n eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet, können wir setzen**

$$(\varrho - x)^n = A_1^{(n)}(x)\,\varrho^{r-1} + A_2^{(n)}(x)\,\varrho^{r-2} + \cdots + A_{r-1}^{(n)}(x)\,\varrho + A_r^{(n)}(x),$$

wo $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots A_r^{(n)}$ inbezug auf x ganze Funktionen vom Grade n mit ganzen Koeffizienten werden.

Der absolute Wert jedes Koeffizienten der Funktionen $A^{(n)}$ kann hier nicht größer als $(a+2)^n$ sein, wenn der absolute Wert jedes Koeffizienten von F nicht größer als eine positive Größe a ist.

Ist nämlich

$$(5.) \qquad \varrho^r = a_1\varrho^{r-1} + a_2\varrho^{r-2} + \cdots + a_{r-1}\varrho + a_r,$$

*) Vergleiche die drei Abhandlungen:

1. *A. Thue,* Bemerkungen über gewisse Näherungsbrüche algebraischer Zahlen. Christiania Videnskabsselskabs Schriften, 1908.
2. Derselbe, Über rationale Annäherungswerte der reellen Wurzel der ganzen Funktion dritten Grades $x^3 - ax - b$. C. V. S., 1908.
3. Derselbe, Om en generel i store hele tal ulösbar ligning. C. V. S., 1908.

wo $a_1, a_2, \ldots a_r$ rationale Größen sind, so bekommt man ja

$$A_1^{(n+1)}\varrho^{r-1} + A_2^{(n+1)}\varrho^{r-2} + \cdots + A_{r-1}^{(n+1)}\varrho + A_r^{(n+1)} = (\varrho - x)^{n+1} = (\varrho - x)^n(\varrho - x)$$
$$= (a_1 A_1^{(n)} + A_2^{(n)} - x A_1^{(n)})\varrho^{r-1} + (a_2 A_1^{(n)} + A_3^{(n)} - x A_2^{(n)})\varrho^{r-2} + \cdots + (a_r A_1^{(n)} - x A_r^{(n)}).$$

Durch ähnliche Betrachtungen erhalten wir somit die Gleichungen

$$\begin{aligned}
(\varrho - x)^n &= B_1^{(0)}(x)\varrho^{r-1} + B_2^{(0)}(x)\varrho^{r-2} + \cdots + B_{r-1}^{(0)}(x)\varrho + B_r^{(0)}(x),\\
\varrho(\varrho - x)^n &= B_1^{(1)}(x)\varrho^{r-1} + B_2^{(1)}(x)\varrho^{r-2} + \cdots + B_{r-1}^{(1)}(x)\varrho + B_r^{(1)}(x),\\
\varrho^2(\varrho - x)^n &= B_1^{(2)}(x)\varrho^{r-1} + B_2^{(2)}(x)\varrho^{r-2} + \cdots + B_{r-1}^{(2)}(x)\varrho + B_r^{(2)}(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varrho^{r-1}(\varrho - x)^n &= B_1^{(r-1)}(x)\varrho^{r-1} + B_2^{(r-1)}(x)\varrho^{r-2} + \cdots + B_{r-1}^{(r-1)}(x)\varrho + B_r^{(r-1)}(x),
\end{aligned} \tag{6.}$$

wo jedes B eine ganze Funktion von x vom Grade n und mit ganzen Koeffizienten bedeutet, während der absolute Wert jedes von diesen Koeffizienten kleiner ist als T_0^n, wo T_0 eine von n unabhängige und nur durch die Koeffizienten von F definierte positive Größe bezeichnet.

Setzen wir ferner

$$U(x) = C_1(x)\varrho^{r-1} + C_2(x)\varrho^{r-2} + \cdots + C_{r-1}(x)\varrho + C_r(x), \tag{7.}$$

wo jedes C eine ganze Funktion von x mit ganzen Koeffizienten bedeutet, so erhält man inbezug auf diesen Koeffizienten, wenn s eine beliebige ganze positive Zahl ist, im ganzen

$$(2s+1)^{(m+1)r} = M \tag{8.}$$

verschiedene Funktionen U, wo der Grad von jedem C nicht größer als m ist, und wo der absolute Wert jedes Koeffizienten der Funktionen C nicht s überschreitet.

Wegen der Irreduktibilität der Funktion F werden die M ganzen Funktionen U nicht bloß inbezug auf den genannten Koeffizienten verschieden.

Je zwei von ihnen können nicht für alle Werte von x einander gleich sein.

Aus (6.) und (7.) folgt

$$(9.) \quad (\varrho - x)^n U(x) = G_1(x)\varrho^{r-1} + G_2(x)\varrho^{r-2} + \cdots + G_{r-1}(x)\varrho + G_r(x),$$

wo

$$(10.) \qquad G_p(x) = B_p^{(0)} C_r + B_p^{(1)} C_{r-1} + \cdots + B_p^{(r-1)} C_1. \qquad (p = 1, 2, \ldots r)$$

Für jede der genannten M Funktionen U wird der Grad von jeder der ganzen Funktionen G nicht größer als $n + m$.

Ferner wird der absolute Wert jedes Koeffizienten dieser Funktionen G nicht größer sein als die kleinste der beiden Größen

$$r(m+1)sT_0^n \quad \text{und} \quad r(n+1)sT_0^n.$$

Wir wollen im folgenden die Größe

$$(11.) \qquad r(n+1)sT_0^n = N$$

als Grenze benutzen.

Der Bequemlichkeit halber wollen wir für T_0 eine solche Größe wählen, daß T_0^n und also auch N für alle ganzen positiven Werte von n irrational werden.

Setzen wir nun

$$(12.) \qquad G_p(x) = b_p^{(0)} x^{n+m} + b_p^{(1)} x^{n+m-1} + \cdots + b_p^{(n+m-1)} x + b_p^{(n+m)},$$

wo die Größen b_p die von x unabhängigen ganzen Koeffizienten von $G_p(x)$ bedeuten, so entspricht, wenn α und β gegeben sind, jeder der M Funktionen U ein zugehöriger Wert von $b_\beta^{(\alpha)}$.

Alle diese M einander gleichen oder ungleichen Werte des Koeffizienten $b_\beta^{(\alpha)}$ liegen zwischen den Grenzen

$$-N \text{ und } N.$$

Bezeichnet h eine beliebige ganze positive Zahl, so können wir uns das Intervall von $-N$ bis N in h gleiche Intervalle J geteilt denken.

Die Größe jedes von diesen h Intervallen wird gleich

$$\frac{2N}{h}.$$

Aus den M Funktionen U können wir folglich M_1, wo $M_1 \geqq \frac{M}{h}$, auswählen, so daß alle zu diesen M_1 Funktionen U gehörigen Werte von $b_\beta^{(\alpha)}$ in einem einzigen der h Intervalle J liegen.

Aus den so gefundenen M_1 Funktionen können wir ferner M_2, wo $M_2 \geqq \frac{M_1}{h} \geqq \frac{M}{h^2}$, auswählen, so daß alle zu diesen M_2 Funktionen U gehörigen Werte eines von $b_\beta^{(\alpha)}$ verschiedenen Koeffizienten $b_{\beta_1}^{(\alpha_1)}$, der Koeffizienten b auch in einem einzigen der h Intervalle J liegen.

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens sehen wir ein, daß man aus den M Funktionen U immer imstande ist, solche L auszuwählen, daß alle die zu diesen L Funktionen U gehörigen Werte eines beliebigen Koeffizienten b der $(n+m+1)(r-2)$ Koeffizienten der $r-2$ Funktionen

$$G_1, G_2, \ldots G_{r-2}$$

in einem einzigen der h Intervalle J liegen werden, während

$$L \geqq \frac{M}{h^{(m+n+1)(r-2)}}. \tag{13.}$$

Ist hier

$$h^{(m+n+1)(r-2)} < M, \tag{14.}$$

so wird

$$L \geqq 2.$$

Bedeuten nun U_1 und U_2, wenn (14.) besteht, zwei beliebige der L Funktionen U, so können wir setzen

$$\begin{aligned}
U_1 &= C_1^{(1)}\varrho^{r-1} + C_2^{(1)}\varrho^{r-2} + \cdots + C_{r-1}^{(1)}\varrho + C_r^{(1)},\\
U_2 &= C_1^{(2)}\varrho^{r-1} + C_2^{(2)}\varrho^{r-2} + \cdots + C_{r-1}^{(2)}\varrho + C_r^{(2)},\\
(\varrho-x)^n U_1 &= G_1^{(1)}\varrho^{r-1} + G_2^{(1)}\varrho^{r-2} + \cdots + G_{r-1}^{(1)}\varrho + G_r^{(1)},\\
(\varrho-x)^n U_2 &= G_1^{(2)}\varrho^{r-1} + G_2^{(2)}\varrho^{r-2} + \cdots + G_{r-1}^{(2)}\varrho + G_r^{(2)},
\end{aligned}$$

wo $C_p^{(1)}, C_p^{(2)}$ und $G_p^{(1)}, G_p^{(2)}$ resp. die Werte von C_p und G_p in (7.) und (9.) deuten, wenn hier bezw. U_1 und U_2 für U gesetzt werden.

Wir bekommen somit die Gleichung

(15.)
$$\begin{aligned}
&(\varrho-x)^n(U_1-U_2)\\
&=(\varrho-x)^n[(C_1^{(1)}-C_1^{(2)})\varrho^{r-1}+(C_2^{(1)}-C_2^{(2)})\varrho^{r-2}+\cdots\\
&\qquad +(C_{r-1}^{(1)}-C_{r-1}^{(2)})\varrho+(C_r^{(1)}-C_r^{(2)})]\\
&=(G_1^{(1)}-G_1^{(2)})\varrho^{r-1}+(G_2^{1)}-G_2^{(2)})\varrho^{r-2}+\cdots\\
&\qquad +(G_{r-1}^{(1)}-G_{r-1}^{(2)})\varrho+(G_r^{(1)}-G_r^{(2)}).
\end{aligned}$$

Jeder Koeffizient der $r-2$ Funktionen

$$(G_1^{(1)}-G_1^{(2)}),\ (G_2^{(1)}-G_2^{(2)}),\ \ldots\ (G_{r-2}^{(1)}-G_{r-2}^{(2)})$$

liegt zwischen den Grenzen

$$-\frac{2N}{h} \text{ und } \frac{2N}{h}.$$

Kann man nun h so groß wählen, daß

(16.)
$$h>2N,$$

so liegen also die genannten ganzen Koeffizienten sämtlich zwischen -1 und 1, und sie müssen dann folglich alle gleich Null sein.

Genügt h den Bedingungen (14.) und (16.), und setzen wir

$$\begin{aligned}
C_p^{(1)} - C_p^{(2)} &= f_p(x), && (p=1,2,3,\ldots r)\\
G_{r-1}^{(1)} - G_{r-1}^{(2)} &= Q(x),\\
G_r^{(2)} - G_r^{(1)} &= P(x),
\end{aligned}$$

so bekommt man aus (15.) die Gleichung

$$(17.)\qquad \varrho Q(x) - P(x) = (\varrho - x)^n [f_1(x)\varrho^{r-1} + f_2(x)\varrho^{r-2} + \cdots + f_{r-1}(x)\varrho + f_r(x)],$$

wo der absolute Wert jedes Koeffizienten der Funktionen f nicht größer als $2s$ wird, während der absolute Wert jedes Koeffizienten der Funktionen P und Q kleiner als

$$2N = 2r(n+1)sT_0^n$$

sein muß.

Infolge (8.) und (11.) werden (14.) und (16.) erfüllt sein, wenn man zwei solche positiven ganzen Zahlen s und h finden kann, daß

$$2r(n+1)sT_0^n < h < (2s+1)^{\frac{(m+1)r}{(m+n+1)(r-2)}}.$$

Dies wird erreicht, wenn man s so bestimmen kann, daß z B.

$$r(n+1)(2s+1)T_0^n < (2s+1)^{\frac{(m+1)r}{(m+n+1)(r-2)}}$$

oder so, daß

$$(18.)\qquad (2s+1)T_1^n < (2s+1)^{\frac{(m+1)r}{(m+n+1)(r-2)}},$$

wo T_1 eine beliebige Größe größer als $2rT_0$ bedeutet.

Aus (2.) und (3.) ergibt sich ferner

$$0 < \frac{\omega}{\left(\frac{1}{r-2}+\frac{\theta}{2}\right)r} < \frac{\omega}{\left(\frac{1}{r-2}+\frac{\theta}{2}\right)r-\omega} < \frac{\omega}{1+\frac{r\theta}{2}+\frac{\theta}{n-1}} < \frac{\frac{2}{r-2}-\frac{\theta}{n-1}}{1+\frac{r\theta}{2}+\frac{\theta}{n-1}}$$

$$= \frac{r}{\left[1+\frac{n}{\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)}\right](r-2)} - 1 < \frac{r}{\left(1+\frac{n}{m+1}\right)(r-2)} - 1$$

$$= \frac{(m+1)r}{(m+n+1)(r-2)} - 1.$$

Der Gleichung (18.) wird folglich genügt, wenn

$$T_1^n < (2s+1)^{\overline{\left(\frac{1}{r-2}+\frac{\theta}{2}\right)r}^{\omega}}$$

oder wenn

$$2s+1 > T_1^{n\overline{\frac{\left(\frac{1}{r-2}+\frac{\theta}{2}\right)r}{\omega}}}. \tag{19.}$$

Bezeichnet also T eine solche von n unabhängige und nur von θ, ω und von den Koeffizienten von F abhängige positive Größe, daß

$$T > T_1^{\overline{\frac{\left(\frac{1}{r-2}+\frac{\theta}{2}\right)r}{\omega}}},$$

so wird der Bedingung (19.) und also auch (18.) genügt, wenn z. B.

$$2s+1 > T^n \geqq 2s-1.$$

Der absolute Wert jedes Koeffizienten der Funktionen P und Q wird hier kleiner als

$$2N = 2r(n+1)s\, T_0^n < (2s-1)\, T_1^n \leqq (TT_1)^n = S^n,$$

wo

$$S = TT_1.$$

Da alle M Funktionen $U(x)$ verschieden sind, kann nicht jede der beiden Funktionen P und Q gleich Null sein für alle Werte von x, d. h. nicht alle Koeffizienten von P und Q können Null sein.

Ferner können auch nicht alle Koeffizienten einer einzigen der beiden Funktionen gleich Null sein.

Die andere der zwei Funktionen, die also nicht identisch gleich Null ist, enthielte nämlich in diesem Falle den Faktor $(\varrho - x)^n$ und also auch, weil $F(x)$ irreduktibel ist, den Faktor $F_{(x)}^n$.

Dies ist aber unmöglich, da der Grad der genannten Funktion nicht größer als $m+n$ ist und also kleiner als rn sein muß.

Nach (3.) erhält man nämlich für $\theta > \frac{2}{r}$:

$$n+m \leqq \left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)+n = \left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)n-\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right) < \left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)n < rn.$$

Der Hilfssatz ist hierdurch bewiesen.*)

Zweiter Hilfssatz. Es mögen $F(x), \varrho, r, \omega, \theta, n$ die im ersten Hilfssatz gegebenen Bedeutungen haben. Ferner seien hier ϱ reell, $\theta > 2$ und p und q zwei solche beliebig gegebenen ganzen Zahlen, daß

$$(20.) \qquad \begin{aligned} q &> 0, \\ |\varrho q - p| &< 1. \end{aligned}$$

Wir können dann immer solche ganzen Zahlen A_0, B_0 und A_1, B_1 finden, daß

$$(21.) \qquad \frac{A_0}{B_0} \leqq \frac{A_1}{B_1},$$

$$(22.) \qquad |\varrho B_0 - A_0| < \left|\left[(\varrho q - p)^{\left(1-\frac{2}{\theta}\right)} C q^{\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)}\right]^{n-1}\right|,$$

$$(23.) \qquad |\varrho B_1 - A_1| < \left|\left[(\varrho q - p)^{\left(1-\frac{2}{\theta}\right)} C q^{\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)}\right]^{n-1}\right|,$$

$$(24.) \qquad |B_0| < D^{n-1} q^{\left[\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)+1\right]},$$

$$(25.) \qquad |B_1| < D^{n-1} q^{\left[\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)+1\right]},$$

---

*) Die obenstehenden Überlegungen können auch auf Funktionen f, P und Q, deren Koeffizienten algebraische Zahlen sind, angewandt werden.

Auf ähnliche Weise kann man ferner Gleichungen von der Form

$$\varrho\, Q(x_1, x_2, \ldots x_r) - P(x_1, x_2, \ldots x_r) = [x_1 \varrho^{r-1} + x_2 \varrho^{r-2} + \cdots + x_r]^n R(x_1, x_2, \ldots x_r),$$

wo P, Q und R ganze homogene Funktionen der Variablen $x_1, x_2, \ldots x_r$ sind, bilden.

wo C und D zwei positive, von den gewählten Werten von n, p und q unabhängige und nur von θ, ω und den Koeffizienten von $F(x)$ abhängige Größen bedeuten.

Beweis. **Aus der Gleichung (4.) erhält man durch Derivation inbezug auf x**

$$\varrho Q(x) - P(x) = (\varrho - x)^n R(x),$$

$$\varrho Q'(x) - P'(x) = (\varrho - x)^{n-1}[(\varrho - x) R'(x) - n R(x)]$$

oder

$$P(x) Q'(x) - P'(x) Q(x)$$
$$= (\varrho - x)^{n-1}[(\varrho - x)(R'(x) Q(x) - R(x) Q'(x)) - n R(x) Q(x)].$$

Da $F(x)$ irreduktibel ist, bekommt man folglich

$$P(x) Q'(x) - P'(x) Q(x) = F^{n-1}(x) W(x), \tag{26.}$$

wo $W(x)$ eine ganze Funktion von x wird.

Da der Grad von P und Q nicht größer als $n+m$ ist, kann der Grad γ von W nicht größer als

$$2(m+n-1) - r(n-1) = 2m - (r-2)(n-1) \leqq \frac{2}{\theta}(n-1) \tag{27.}$$

sein.

Es können nicht sämtliche Koeffizienten von $W(x)$ gleich Null sein; sonst erhielte man für alle Werte von x

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{Q'(x)}{Q(x)}$$

oder

$$P(x) = \lambda Q(x),$$

wo λ konstant wäre.

Die Gleichung

$$(\varrho - \lambda) Q(x) = (\varrho - x)^n R(x)$$

ist aber unmöglich, da $Q(x)$ nicht durch $F^n(x)$ teilbar sein kann, weil ihr Grad ja kleiner als rn ist.

Wir bemerken nun ferner, daß nicht jeder Ausdruck

$$\frac{d^a}{dx^a} P(x) \frac{d^b}{dx^b} Q(x) - \frac{d^b}{dx^b} P(x) \frac{d^a}{dx^a} Q(x),$$

in welchem jede der Zahlen a und b eine beliebige der $\gamma + 2$ Zahlen

$$0, 1, 2, 3, \ldots \gamma, \gamma + 1$$

bezeichnet, gleich Null werden kann, wenn

$$x = \frac{p}{q}$$

gesetzt wird.

Sonst erhielte man nämlich aus (26.), daß immer

$$\frac{d^u}{dx^\mu} [F^{n-1}(x) W(x)]_{x=\frac{p}{q}} = 0,$$

wo μ eine beliebige der $\gamma + 1$ ganzen Zahlen

$$0, 1, 2, 3, \ldots \gamma$$

bedeutet.

Aber dann enthielte ja $F^{n-1}(x) W(x)$ und folglich auch $W(x)$ einen Faktor $\left(x - \frac{p}{q}\right)^{\gamma+1}$, was unmöglich ist.

Wir bekommen somit zwei Gleichungen

$$\varrho\, Q^{(a)}(x) - P^{(a)}(x) = \frac{d^a}{dx^a} [(\varrho - x)^n R(x)], \tag{28.}$$

$$\varrho\, Q^{(b)}(x) - P^{(b)}(x) = \frac{d^b}{dx^b} [(\varrho - x)^n R(x)], \tag{29.}$$

wo

$$(30.) \qquad P^{(a)}\left(\frac{p}{q}\right) Q^{(b)}\left(\frac{p}{p}\right) \leqq P^{(b)}\left(\frac{p}{q}\right) Q^{(a)}\left(\frac{p}{q}\right),$$

während jede der ganzen Zahlen a und b gleich oder kleiner als $\gamma+1$ und gleich oder größer als 0 wird.

Bedeutet δ eine beliebige der Zahlen a und b, so erhält man also

$$(31.) \qquad \varrho\, Q^{(\delta)}(x) - P^{(\delta)}(x) = \frac{d^\delta}{dx^\delta}[(\varrho - x)^n R(x)].$$

Jeder Koeffizient von $P^{(\delta)}(x)$ und $Q^{(\delta)}(x)$ muß durch $1\cdot 2\cdot 3\cdots\delta$ teilbar sein.

Aus (31.) ergibt sich nun:

$$(32.) \qquad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\delta}\,[\varrho\, Q_{-1}^{(\delta)}(x) - P^{(\delta)}(x)]$$

$$= (-1)^n \frac{(x-\varrho)^{n-\delta}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\delta}\Big[(n)(n-1)\cdots(n-\delta+1)\,R(x) + \cdots +$$

$$\frac{(\delta)(\delta-1)\cdots(\delta-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}(n)(n-1)\cdots(n-[\delta-k]+1)(x-\varrho)^k R^{(k)}(x) + \cdots$$

$$+ (x-\varrho)^\delta R^{(\delta)}(x)\Big]$$

$$= (-1)^n (x-\varrho)^{n-\delta}\Big[\frac{(n)(n-1)\cdots(n-\delta+1)}{1.2\cdots\delta} R(x) + \cdots$$

$$+ \frac{(n)(n-1)\cdots(n-[\delta-k]+1)}{1\cdot 2\cdots(\delta-k)}(x-\varrho)^k \frac{R^{(k)}(x)}{1\cdot 2\cdots k} + \cdots + (x-\varrho)^\delta \frac{R^{(\delta)}(x)}{1\cdot 2\cdots\delta}\Big].$$

Der absolute Wert jedes Koeffizienten von $\frac{Q^{(\delta)}}{\delta!}$ und $\frac{P^{(\delta)}}{\delta!}$ wird kleiner als

$$(33.) \qquad \frac{(m+n)(m+n-1)\cdots(m+n-\delta+1)}{1\cdot 2\cdots\delta} S^n < 2^{m+n} S^n < (2^r S)^n.$$

Bezeichnet t die größte der Größen 1 und $|\varrho^{r-1}|$, so wird der absolute Wert jedes Koeffizienten von $R(x)$ kleiner als

$$r\,t\,T^n,$$

oder kleiner als J^n, wo z. B.

$$J=r\,t\,T.$$

Der absolute Wert jedes Koeffizienten von $\frac{R^{(k)}}{k!}$ für $k=0,1,2,\ldots\delta$ wird folglich kleiner als

$$(34.)\qquad \frac{(m)(m-1)\cdots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}J^n<2^m J^n<(2^{r-1}J)^n.$$

Aus (32.) erhält man aber

$$(35.)\qquad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\delta}\Big[\varrho\,Q^{(\delta)}\left(\frac{p}{q}\right)q^{n+m-\delta}-P^{(\delta)}\left(\frac{p}{q}\right)q^{n+m-\delta}\Big]$$

$$=(-)^n(p-\varrho q)^{n-\delta}\Big[\frac{(n)(n-1)\cdots(n-\delta+1)}{1\cdot 2\cdots\delta}R\left(\frac{p}{q}\right)q^m+\cdots+$$

$$\frac{(n)(n-1)\cdots(n-[\delta-k]+1)}{1\cdot 2\cdots(\delta-k)}(p-\varrho q)^k\,\frac{R^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)q^{m-k}}{1\cdot 2\cdots k}+\cdots+(p-\varrho q)^\delta\,\frac{R^{(\delta)}\left(\frac{p}{q}\right)q^{m-\delta}}{1\cdot 2\cdots\delta}\Big],$$

wo

$$\left|\frac{p}{q}\right|<|\varrho|+1=h.$$

Der absolute Wert jeder der ganzen Zahlen

$$\frac{q^{n+m-\delta}}{1\cdot 2\cdots\delta}P^{(\delta)}\left(\frac{p}{q}\right)=A\quad\text{und}\quad\frac{q^{n+m-\delta}}{1\cdot 2\cdots\delta}Q^{(\delta)}\left(\frac{p}{q}\right)=B$$

wird kleiner als

$$(2^r S)^n q^{n+m-\delta}(1+h+h^2+\cdots+h^{n+m-\delta})<(2^r S)^n(1+h)^{n+m-\delta}q^{n+m-\delta}$$

oder kleiner als

$$[(2+2h)^r S]^n q^{\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)+1} < D^{n-1} q^{\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)+1},$$

wo D eine von n, p und q unabhängige positive Größe ist.

Ferner wird der absolute Wert von

$$\frac{R^{(k)}\binom{p}{q} q^{m-k}}{1\cdot 2\cdots k}$$

kleiner als

$$(2^{r-1}J)^n q^{m-k}(1+h+h^2+\cdots+h^{m-k}) < (2^{r-1}J)^n (1+h)^m q^m.$$

Da $|p-\varrho q|<1$, erhalten wir somit aus (35.),

$$|\varrho B - A| < |(p-\varrho q)^{n-\delta}|(2^{r-1}J)^n(1+h)^m q^m \times\left[1+\frac{n}{1}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-\delta-1)}{1\cdot 2\cdots\delta}\right]$$

oder

$$|\varrho B - A| < |(p-\varrho q)^{n-\gamma-1}|\,(2^r J)^n (1+h)^m q^m$$

oder wegen der Bedingungen (3.) und (27.):

$$|\varrho B - A| < \left|(p-\varrho q)^{\left(1-\frac{2}{\theta}\right)(n-1)}(2^r J)^n (1+h)^{\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)} q^{\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)}\right|.$$

Wir können nun eine von n, p und q unabhängige positive Größe C bestimmen, so daß

$$(2^r J)^n (1+h)^{\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)} < C^{n-1}.$$

Man bekommt dann endlich:

$$|\varrho B - A| < \left|\left[(\varrho q-p)^{\left(1-\frac{2}{\theta}\right)} C q^{\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)}\right]^{n-1}\right|.$$

Unser zweiter Hilfssatz ist somit bewiesen.

Durch diesen Satz können wir nun sehr leicht die Richtigkeit des Theorems (I.) nachweisen.

Existierten nämlich unendlich viele Paare von positiven ganzen Zahlen p und q, die der Relation (1.) genüge leisten, so könnten wir auf unendlich viele Weisen vier ganze Zahlen p_0, q_0 und p_1, q_1 finden, sodaß

$$q_1 > q_0 > 0,$$

$$(36.) \qquad q_0\varrho - p_0 = \frac{\varepsilon_0}{q_0^h},$$

$$(37.) \qquad q_1\varrho - p_1 = \frac{\varepsilon_1}{q_1^h},$$

wo h hier eine beliebig gegebene positive Größe $> \frac{r}{2}$ bedeutet, während $|\varepsilon_0|$ und $|\varepsilon_1|$ kleiner als c wären.

Wählen wir nun für θ eine beliebige positive Größe, z. B. $> r+1$, und für ω eine beliebige positive Größe $< \frac{2}{r-2}$, so können wir hier, wenn

$$n-1 > \frac{\theta}{\frac{2}{r-2} - \omega},$$

nach dem zweiten Hilfssatz und nach (36.) immer zwei ganze Zahlen A und B finden, sodaß

$$\frac{A}{B} \gtrless \frac{p_1}{q_1},$$

während

$$(38.) \qquad \varrho B - A = \frac{\varphi E^{n-1}}{q_0^{\left[\left(1-\frac{2}{\theta}\right)h - \left(\frac{r-2}{2} + \frac{1}{\theta}\right)\right](n-1)}}$$

und

$$(39.) \qquad |\varphi| < 1, \qquad B < D^{n-1} q_0^{\left[\left(\frac{r}{2} + \frac{1}{\theta}\right)(n-1)+1\right]},$$

wo D und E zwei von n, p_0 und q_0 unabhängige und nur von den Koeffizienten von $F(x)$ und von C, h, θ und ω abhängige positive Größen bedeuten.

Wir bemerken, daß

$$\left(1-\frac{2}{\theta}\right)h > \frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta},$$

wenn $\theta > r+1$.

Aus (37.) und (38.) folgt ferner

$$p_1 B - q_1 A = \frac{\varphi E^{n-1} q_1}{q_0^{\left[\left(1-\frac{2}{\theta}\right)h-\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)\right](n-1)}} - \frac{\varepsilon_1 B}{q_1^h}.$$

Da $p_1 B \gtrless q_1 A$ ist, wird nicht

$$\left|\frac{\varphi E^{n-1} q_1}{q_0^{\left[\left(1-\frac{2}{\theta}\right)h-\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)\right](n-1)}}\right| < \frac{1}{2},$$

$$\left|\frac{\varepsilon_1 B}{q_1^h}\right| < \frac{1}{2}.$$

Diese Ungleichheiten müssen indessen stattfinden, wenn

$$\frac{E^{n-1} q_1}{q_0^{\left[\left(1-\frac{2}{\theta}\right)h-\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)\right](n-1)}} < \frac{1}{2},$$

$$\frac{C D^{n-1} q_0^{\left[\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)+1\right]}}{q_1^h} < \frac{1}{2}$$

oder wenn

$$(40.)\qquad \frac{\log q_1 + \log 2}{\left[\left(1-\frac{2}{\theta}\right)h-\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)\right]\log q_0 - \log E} < n-1 < \frac{h\log q_1 - \log 2C q_0}{\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)\log q_0 + \log D}.$$

Da $h > \frac{r}{2}$, könnte man θ so groß gewählt haben, daß auch

$$\theta > \frac{2h^2 + h + 1}{\left(h - \frac{r}{2}\right)(h+1)}. \tag{41.}$$

Wir bekämen dann

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{2}{\theta}\right)h - \left(\frac{r-2}{2} + \frac{1}{\theta}\right)} < \frac{h}{\frac{r}{2} + \frac{1}{\theta}}. \tag{42.}$$

Hätte folglich die Relation (1.) unendlich viele Auflösungen in ganzen positiven Zahlen p und q, so könnte man zwei Auflösungen (p_0, q_0) und (p_1, q_1) finden, wo q_0 und $\frac{q_1}{q_0}$ so groß wären, daß die Differenz der Grenzen für $n-1$ in (40.) größer als 1 und die Grenzen selbst größer als jede beliebig gegebene Größe würden.

Man wäre dann imstande, ganze Zahlen n, die den Bedingungen (40.) genüge leisten, zu finden.

Hiermit ist unser Theorem (I.) bewiesen.

Nach (36.) und (37.) wird

$$C\left[\frac{q_0}{q_1^h} + \frac{q_1}{q_0^h}\right] \gtrless 1,$$

wenn

$$\frac{p_0}{q_0} \gtrless \frac{p_1}{q_1}.$$

Man kann folglich eine so große positive Größe G bestimmen, daß der Relation (1.) höchstens durch ein einziges Paar von ganzen positiven Zahlen p und q genügt werden kann, wenn q größer als G sein soll.

Wir haben oben die Existenz einer oberen Grenze für die Zahlen p und q, die der Relation (1.) genüge leisten, nachgewiesen. Aber, wie man sofort sieht, gibt uns der Beweis im allgemeinen doch keine direkte Methode, eine solche Grenze zu bestimmen.

Aus Theorem (I.) folgt unmittelbar:

Theorem **II.** *Setzt man, wenn* ϱ *positiv ist,*

$$\varrho = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}}},$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}},$$

wo jedes a *eine positive ganze Zahl bedeutet, während* P_n *und* Q_n *relative positive Primzahlen sind, so wird der Relation*

$$a_n > Q_n^{k + \frac{r}{2} - 1}, \tag{43.}$$

wo k *eine beliebig gegebene positive Größe bezeichnet, nicht durch unendlich viele ganze positive Zahlen* n *genügt.*

Theorem **III.** *Bezeichnet* ϱ *eine positive Wurzel einer ganzen Funktion* F *mit ganzen Koeffizienten und vom Grade* r*, während* k *und* h *zwei beliebig gegebene positive Größen bedeuten, so kann man eine so große positive Größe* G_0 *bestimmen, daß, wenn zwei positive ganze Zahlen* p_0 *und* q_0 *existieren, wo*

$$q_0 > G_0,$$

während

$$0 < |\varrho q_0 - p_0| < \frac{1}{q_0^{\frac{r}{2} + k}},$$

daß man dann eine so große positive Größe G *definieren kann, daß sich nicht zwei positive ganze Zahlen* p *und* q *finden, wo*

$$q > G$$

und

$$0<|\varrho q-p|<\frac{1}{q^{\frac{r}{2(k+1)}+h}}.$$

Beweis. **Hätten wir nämlich**

$$\varrho q_0-p_0=\frac{\varepsilon_0}{q_0^{\frac{r}{2}+k}},$$

$$\varrho q-p=\frac{\varepsilon}{q^{\frac{r}{2(k+1)}+h}},$$

wo

$$0<|\varepsilon_0|<1 \text{ und } 0<|\varepsilon|<1,$$

so bekommt man nach dem zweiten Hilfsatz zwei ganze Zahlen A und B, für die

$$Aq \gtrless Bp,$$

$$\varrho B-A=\frac{\varphi C^{n-1}}{q_0^{\left[\left(1-\frac{2}{\theta}\right)\left(\frac{r}{2}+k\right)-\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)\right](n-1)}},$$

$$|B|<D^{n-1}q_0^{\left[\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)+1\right]},$$

wo $|\varphi|<1$, während C, D, n, θ die früheren Bedeutungen haben. $\theta>r+1$.

Da $|pB-qA|\gtrless 1$, darf hier nicht sein

$$\frac{D^{n-1}q_0^{\left[\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)(n-1)+1\right]}}{q^{\frac{r}{2(k+1)}+h}}<\frac{1}{2},$$

$$\frac{C^{n-1}q}{q_0^{\left[\left(1-\frac{2}{\theta}\right)\left(\frac{r}{2}+k\right)-\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)\right](n-1)}}<\frac{1}{2}$$

oder

$$(44.)\quad \frac{\log q+\log 2}{\left[\left(1-\frac{2}{\theta}\right)\left(\frac{r}{2}+k\right)-\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)\right]\log q_0-\log C}$$

$$<n-1<\frac{\left(\frac{r}{2(k+1)}+h\right)\log q-\log 2q_0}{\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}\right)\log q_0+\log D}.$$

Wenn nun θ auch so groß gewählt wird, daß

$$\theta>\frac{(r+2k+1)\left(\frac{r}{2(k+1)}+h\right)+1}{h(k+1)},$$

so wird

$$\frac{1}{\left(1-\frac{2}{\theta}\right)\left(\frac{r}{2}+k\right)-\left(\frac{r-2}{2}+\frac{1}{\theta}\right)}<\frac{\frac{r}{2(k+1)}+h}{\frac{r}{2}+\frac{1}{\theta}}.$$

Wir könnten dann folglich, wenn unser Theorem III. nicht richtig wäre, Zahlen p_0, q_0, p, q und n finden, die den unmöglichen Relationen (44.) Genüge leisten.

Man beachte den Fall

$$\frac{r}{2}+k=r-1,$$

$$\frac{r}{2(k+1)}+h=1+h.$$

Theorem **IV.** *Die Gleichung*

$$U(p,q)=c,$$

wo c eine gegebene Konstante ist, während U eine in bezug auf p und q ganze homogene und irreduktible Funktion mit ganzen Koeffizienten bedeutet, besitzt nicht unendlich viele Auflösungen in ganzen positiven Zahlen p und q, wenn der Grad von U größer als 2 ist.

Sind die Wurzeln einer beliebigen ganzen Funktion $F(x)$ von x mit ganzen Koeffizienten und vom Grade r sämtlich verschieden, dann wollen wir allgemeiner beweisen, daß die Relation

$$(45.) \qquad 0 < \left| q^r F\left(\frac{p}{q}\right) \right| < c q^h,$$

wo c eine gegebene positive und h eine gegebene reelle Größe bedeuten, nur eine endliche Anzahl Auflösungen in ganzen von Null verschiedenen Zahlen p und q haben kann, wenn

$$h < \frac{r-2}{2} \quad \text{und} \quad q > 0$$

sind.

Setzen wir nämlich

$$F(x) = a(x - \varrho_1)(x - \varrho_2) \cdots (x - \varrho_r)$$

oder nach (45.)

$$|a(p - q\varrho_1)(p - q\varrho_2) \cdots (p - q\varrho_r)| < c q^h,$$

so sieht man, daß der Modulus einer der Faktoren $p - q\varrho_s$, den man mit $p - q\varrho$ bezeichnen kann, kleiner als

$$c^{\frac{1}{r}} q^{\frac{h}{r}}$$

sein muß.

Da nun die Differenz zwischen $p - q\varrho$ und einem der anderen Faktoren $p - q\varrho_a$ gleich $q(\varrho_a - \varrho)$ ist, wo mod $q(\varrho_a - \varrho) > bq$ wird, wo

b eine von Null verschiedene und von α unabhängige positive Größe bedeutet, bekommt man folglich

$$\text{mod}\,(p - q\varrho_\alpha) > bq - c^{\frac{1}{r}} q^{\frac{h}{r}} > dq,$$

wo d eine positive Größe bezeichnet.

Wir bekommen somit

$$\text{mod}\,(p - q\varrho) < \frac{cq^h}{|a|\, d^{r-1} q^{r-1}} < \frac{f}{q^{\frac{r}{2}+k}},$$

wo f und k gegebene positive Größen bedeuten*).

Könnten hier $|p|$ und q größer als jede beliebige positive Größe werden, so müßte ϱ reell sein und man bekäme

$$|p - q\varrho| < \frac{f}{q^{\frac{r}{2}+k}},$$

was nach Theorem I. unmöglich ist.

---

*) Vergleiche den Beweis von *Liouville* für die Existenz transzendenter Größen; Journ. de Math. t. XVI, 1851.

Verallgemeinerung des *Sylvester*schen Determinantensatzes.

Von Herrn *Ernst Fischer* in Brünn.

Der bekannte Determinantensatz von *Sylvester* ist in einem allgemeineren und doch einfachen Satze enthalten, den ich mir hier mitzuteilen erlaube.

Mit dieser Verallgemeinerung ist insofern ein Abschluß erreicht, als alle überhaupt möglichen Sätze eines gewissen von vornherein deutlich umschriebenen Typus sich als Spezialfälle jenes Satzes erweisen.

§ 1.

Aus der Matrix

$$(1.) \qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}, \end{matrix}$$

deren Elemente wir uns als unabhängige Variable denken, bilden wir alle ϱ-reihigen Determinanten und bezeichnen sie wie folgt. Es mögen zunächst die $\binom{n}{\varrho} = \nu$ Kombinationen, welche sich aus den Nummern $1, 2, \ldots n$ zu je ϱ verschiedenen bilden lassen, in irgend einer Reihenfolge mit

$$(2.) \qquad C_1, C_2, \ldots C_\nu$$

bezeichnet werden. In jeder dieser Kombinationen schreiben wir für einen

Augenblick die ϱ Nummern in einer bestimmten, willkürlich gewählten Reihenfolge und nennen die so geschriebenen Kombinationen $I_1, I_2, \ldots I_\nu$; wenn nun I_i und I_k lauten $\alpha\beta\ldots\varepsilon$ und $\alpha'\beta'\ldots\varepsilon'$, so setzen wir

$$(3.) \qquad \Delta_{ik} = \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha'} & a_{\alpha\beta'} & \ldots & a_{\alpha\varepsilon'} \\ a_{\beta\alpha'} & a_{\beta\beta'} & \ldots & a_{\beta\varepsilon'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\varepsilon\alpha'} & a_{\varepsilon\beta'} & \ldots & a_{\varepsilon\varepsilon'} \end{vmatrix}.$$

Wir ordnen diese Determinanten zu der Matrix

$$\begin{matrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \ldots & \Delta_{1\nu} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \ldots & \Delta_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_{\nu 1} & \Delta_{\nu 2} & \ldots & \Delta_{\nu\nu} \end{matrix}.$$

Gegenstand unserer Untersuchung sind nun die aus dieser Matrix entspringenden Hauptdeterminanten beliebiger Ordnung:

$$(4.) \qquad \Theta = \begin{vmatrix} \Delta_{pp} & \Delta_{pq} & \ldots & \Delta_{ps} \\ \Delta_{qp} & \Delta_{qq} & \ldots & \Delta_{qs} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_{sp} & \Delta_{sq} & \ldots & \Delta_{ss} \end{vmatrix}.$$

Zur Bestimmung einer solchen Determinante Θ genügt offenbar die Kenntnis ihres Kombinationensystems $[C_p, C_q, \ldots C_s]$.

Wir bezeichnen ferner mit $A_1, A_2, \ldots A_n$ die Determinanten:

$$(5.) \qquad A_h = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2h} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{h1} & a_{h2} & \ldots & a_{hh} \end{vmatrix}.$$

§ 2.

In Verallgemeinerung der für $\varrho = n - 1$ von *Cauchy* und *Jacobi* gewonnenen Resultate gab *Sylvester* für beliebiges ϱ die beiden folgenden Sätze:

a) Besteht das Kombinationensystem von Θ aus allen $\nu = \binom{n}{\varrho}$ Kombinationen, so ist Θ eine Potenz von A_n.

b) Besteht das Kombinationensystem von Θ aus allen denjenigen Kombinationen, in welchen keine der Nummern $1, 2, \ldots h$ fehlt ($h \leqq \varrho < n$ angenommen), so ist Θ ein Potenzprodukt von A_h und A_n.

Aber die Reihe dieser Sätze läßt sich fortsetzen, z. B.

c) Besteht das Kombinationensystem von Θ aus allen denjenigen Kombinationen, welche die Nummern $1, 2, \ldots h$ vollzählig und von den Nummern $h+1, \ldots k$ mindestens eine enthalten, während von den Nummern $l+1, \ldots n$ mindestens eine fehlt ($h < k < l < n$ angenommen), so ist Θ ein Potenzprodukt von A_h, A_k, A_l und A_n.

Wir stellen uns geradezu die Aufgabe, den allgemeinsten Satz dieser Art zu finden.

Problem: Es sollen alle diejenigen Kombinationensysteme $[C_p, C_q, \ldots C_s]$ angegeben werden, für welche Θ in ein Potenzprodukt der Determinanten $A_1, A_2, \ldots A_n$ zerfällt:

$$\Theta = A_1^{\pi_1} A_2^{\pi_2} \ldots A_n^{\pi_n}. \tag{6.}$$

Indem unter allen $2^n - 1$ Hauptdeterminanten von (1.) gerade die n Determinanten A_h bevorzugt werden, erscheint dieser Ansatz etwas speziell. Er empfiehlt sich aber dadurch, daß die Werte der Exponenten $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n$ sich stets schon aus den Gradverhältnissen der Funktion Θ unmittelbar ergeben und daher in die Sätze nicht aufgenommen zu werden brauchen.

Zu späterem Gebrauche bemerke ich noch, daß es sogar genügen würde, die Sätze in der Form

$$\Theta = c \cdot A_1^{\pi_1} A_2^{\pi_2} \ldots A_n^{\pi_n}$$

mit einem nicht näher angegebenen konstanten Faktor c auszusprechen, da sich durch Eintragung der Werte $a_{ii} = 1$, $a_{ik} = 0$ $(i \neq k)$ sofort $c = 1$ erweist.

§ 3.

Ein Kombinationensystem $\mathfrak{S}$ heißt *nach unten geschlossen*, wenn aus einer Kombination von $\mathfrak{S}$ durch Ersetzung irgend welcher ihrer ϱ Nummern

durch tiefere stets nur Kombinationen erhalten werden können, die ebenfalls zu $\mathfrak{S}$ gehören.

Ordnet man in den einzelnen Kombinationen die ϱ Nummern steigend an, so kann man diese Definition auch so aussprechen: ein Kombinationensystem $\mathfrak{S}$ heißt nach unten geschlossen, wenn neben jeder zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Kombination $\alpha\,\beta \ldots \varepsilon$ auch alle den Bedingungen

$$\alpha' \leqq \alpha,\ \beta' \leqq \beta,\ \ldots\ \varepsilon' \leqq \varepsilon$$

genügenden Kombinationen $\alpha'\,\beta' \ldots \varepsilon'$ zu $\mathfrak{S}$ gehören.

Theorem: *Damit die durch* (4.) *definierte Determinante* Θ *in ein produkt der durch* (5.) *definierten* $A_1, A_2, \ldots A_n$ *zerfällt, ist notwendig und hinreichend, daß ihr Kombinationensystem nach unten geschlossen ist.*

4.

Ich beweise zunächst, daß die Bedingung notwendig ist. Hierzu genügt es offenbar, folgendes darzutun.

Es sei C eine der Kombinationen des zu Θ gehörigen Kombinationensystems $\mathfrak{S}$. C enthalte die Nummer $\varkappa$, nicht aber die kleinere Nummer i. Wir bezeichnen die Kombination, welche aus C hervorgeht, wenn man $\varkappa$ durch i ersetzt, mit C'. Es ist nun darzutun, daß unter der Annahme einer Zerlegung (6.) notwendig auch C' zu $\mathfrak{S}$ gehören muß.

Zu dem Ende spezialisiere ich diejenigen Elemente der Matrix (1.), welche nicht der i-ten oder $\varkappa$-ten Zeile angehören, und zwar

$$a_{\mu\mu} = 1,\ a_{\mu\lambda} = 0\ (\mu \neq \lambda)\ \text{für}\ \mu \neq i, \varkappa.$$

Dagegen behalte ich

$$a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in}$$
$$a_{\varkappa 1}\ a_{\varkappa 2}\ \ldots\ a_{\varkappa n}$$

als Variable bei.

Dies hat in der Determinante (4.) folgende Wirkung. In denjenigen Zeilen von (4.), deren zugehörige Kombinationen keine der Nummern i und $\varkappa$ enthalten, wird das Diagonalelement $= 1$, die andern $= 0$. In denjenigen

Spalten, deren Kombinationen beide Nummern i und $\varkappa$ gleichzeitig enthalten, wird das Diagonalelement

$$= \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{i\varkappa} \\ a_{\varkappa i} & a_{\varkappa\varkappa} \end{vmatrix},$$

die andern $= 0$. Hiernach wird

$$\Theta = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{i\varkappa} \\ a_{\varkappa i} & a_{\varkappa\varkappa} \end{vmatrix}^{\sigma} \cdot \Theta_0,$$

wo Θ_0 eine Hauptunterdeterminante von (4.) ist, gebildet mit denjenigen Kombinationen von $\mathfrak{S}$, welche von den Nummern i und $\varkappa$ eine und nur eine enthalten. In Θ_0 fasse ich nun die Spalte ins Auge, die zu unserer obigen Kombination C gehört. Das Diagonalement dieser Spalte reduziert sich auf $a_{\varkappa\varkappa}$, die anderen auf 0 — mit alleiniger Ausnahme des eventuell in der zu C' gehörigen Zeile befindlichen.

Käme daher C' in $\mathfrak{S}$ nicht vor, so erhielte Θ durch die Spezialisierung den Faktor $a_{\varkappa\varkappa}$. Dies steht aber im Widerspruch mit der angenommenen Zerlegung (6.); denn die rechte Seite von (6.) zerfällt bei der Spezialisierung in ein Potenzprodukt von

$$a_{ii} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{i\varkappa} \\ a_{\varkappa i} & a_{\varkappa\varkappa} \end{vmatrix},$$

enthält also den Faktor $a_{\varkappa\varkappa}$ nicht.

5.

Um zu beweisen, daß die Bedingung auch hinreichend ist, bedarf es einiger Vorbereitungen.

Ich werde mich folgender Abkürzungen für Polarenoperatoren bedienen:

$$\left(\frac{a_{i\,.}\,\partial}{\partial\, a_{\varkappa\,.}}\right) = a_{i1}\frac{\partial}{\partial\, a_{\varkappa 1}} + \cdots + a_{in}\frac{\partial}{\partial\, a_{\varkappa n}},$$

$$\left(\frac{a_{.\,i}\,\partial}{\partial\, a_{.\,\varkappa}}\right) = a_{1i}\frac{\partial}{\partial\, a_{1\varkappa}} + \cdots + a_{ni}\frac{\partial}{\partial\, a_{n\varkappa}}.$$

Die Grundlage des folgenden bildet das von mehreren Autoren (zuerst wohl von *F. Mertens*) *bewiesene Prinzip**)*:*

Die allgemeine Gestalt aller ganzen rationalen Funktionen Φ der Elemente (1.), welche in den Elementen der letzten Zeile von (1.) homogen vom Grade μ_n sind und den Differentialgleichungen

$$\left(\frac{a_1.\partial}{\partial a_n.}\right)\Phi = 0,\ \left(\frac{a_2.\partial}{\partial a_n.}\right)\Phi = 0, \ldots \left(\frac{a_{n-1}.\partial}{\partial a_n.}\right)\Phi = 0$$

genügen, lautet

$$\Phi = Q \cdot A_n^{\mu_n},$$

wo Q die allgemeinste ganze rationale Funktion der in den ersten $n-1$ Zeilen von (1.) stehenden Elemente allein bedeutet.

Die geforderten Eigenschaften der Funktion $\Phi = \Phi(a_1., a_2., \ldots a_n.)$ lassen sich nämlich in die Identität

$$\Phi(a_1., a_2., \ldots a_n.)\, x_n^{\mu_n} = \Phi(a_1., a_2., \ldots a_n., a_1.x_1 + a_2.x_2 + \cdots + a_n.x_n)$$

mit den Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots x_n$ zusammenfassen; setzt man hierin

$$x_1 = \frac{\partial A_n}{\partial a_{1n}},\quad x_2 = \frac{\partial A_n}{\partial a_{2n}},\quad \ldots\quad x_n = \frac{\partial A_n}{\partial a_{nn}} = A_{n-1},$$

so entsteht

$$\Phi \cdot A_{n-1}^{\mu_n} = Q_1 \cdot A_n^{\mu_n},$$

---

*) *Mertens*, Stzgsber. d. Wiener Akad., math. Klasse, Bd. 81, Abt. 2 (1880) S. 260, wo ein etwas allgemeinerer Satz nebst Anwendungen gegeben wird. — *Mertens*, Monatshefte f. Math. u. Phys., Bd. 4 (1893), vgl. besonders § 15, § 16. — *Capelli* (1882), vgl. sein späteres Buch „Lezioni sulla teoria delle forme algebriche“ (Napoli 1902) S. 23. — Man sehe auch *Deruyts* „Essai d'une théorie générale des formes algébriques“ (Bruxelles 1891) S. 57 (referiert bei *Capelli* a. a. O. S. 225). — Die in der erstzitierten Abhandlung von *Mertens* enthaltene entscheidende Fortbildung der *Weierstraß*schen (Werke III S. 271) Auffassung des Determinantenbegriffs ist in der Folge auch für die allgemeine Resultantentheorie wichtig geworden, s. *Mertens* Stzgsber. d. Wiener Akad., math. Klasse, Bd. 93 (1886) und Bd. 108 (1899).

wo Q_1 eine ganze rationale Funktion bedeutet; da aber A_{n-1} und A_n teilerfremd sind, folgt

$$\Phi = Q \cdot A_n^{u_n},$$

wo Q den Gradverhältnissen nach von den $a_{n\cdot}$ frei ist. — Die Umkehrung erhellt unmittelbar.

6.

Aus diesem Prinzip folgern wir das nachstehende Lemma.

Lemma: Die allgemeine Gestalt einer ganzen rationalen Funktion F der Elemente (1.), welche in den Elementen jeder einzelnen Zeile und Spalte von (1.) homogen ist und den Differentialgleichungen

$$(7.) \qquad \left(\frac{a_{i\cdot}\partial}{\partial a_{\varkappa\cdot}}\right) F = 0 \text{ und } \left(\frac{a_{\cdot i}\partial}{\partial a_{\cdot\varkappa}}\right) F = 0$$

für alle Paare $i, \varkappa$, in welchen

$$i < \varkappa$$

ist, genügt, lautet

$$F = c \cdot A_{1_1}^{\pi_1} A_2^{\pi_2} \dots A_n^{\pi_n},$$

unter c eine willkürliche Konstante verstanden*).

Beweis: Ist $\mu_{n\cdot}$ der Grad von F in den Elementen der letzten Zeile von (1.), $\mu_{\cdot n}$ der Grad von F in den Elementen der letzten Spalte von (1.) so haben wir nach dem Prinzip des Artikels 5

$$F = Q\, A_n^{\mu_{n\cdot}},$$
$$F = Q_1 A_n^{\mu_{\cdot n}},$$

wo Q von den $a_{n\cdot}$, Q_1 von den $a_{\cdot n}$ frei ist. Die Berechnung des Grades in bezug auf das Element a_{nn} lehrt, daß

*) Es genügt übrigens die $2(n-1)$ Differentialgleichungen zu fordern, die sich für $i = \varkappa - 1$ ergeben, da die andern schon aus ihnen folgen.

$$\mu_{n\cdot} = \mu_{\cdot n},$$

also

$$Q = Q_1$$

sein muß, d. h. Q enthält bloß die $(n-1)^2$ Elemente, welche in A_{n-1} vorkommen. Man kann nun mit Q und A_{n-1} so verfahren, wie eben mit F und A_n verfahren wurde, da die hierzu nötigen Differentialgleichungen sich, da auch A_n ihnen genügt, von F auf Q übertragen u. s. f. — Die Umkehrung leuchtet sofort ein.

7.

Nun ist der Beweis des Theorems aus Artikel 3 leicht zu beenden. Wir haben noch nachzuweisen, daß die Bedingung hinreichend ist, und nehmen daher an, daß das Kombinationensystem von Θ nach unten geschlossen sei. Nach dem Lemma des Artikels 6 genügt es zu zeigen, daß Θ den Differentialgleichungen (7.) genügt, z. B.

$$\left(\frac{a_{i\cdot}\,\partial}{\partial a_{\varkappa\cdot}}\right)\Theta = 0 \text{ für } i < \varkappa.$$

Um an Θ die Operation $\left(\frac{a_{i\cdot}\,\partial}{\partial a_{\varkappa\cdot}}\right)$ zu vollziehen, hat man die Summe aller derjenigen Determinanten Θ' zu bilden, welche entstehen, wenn man die Operation an nur einer Zeile der Determinante (4.) ausführt.

Entspricht nun diese Zeile einer Kombination C, welche entweder die Nummer $\varkappa$ nicht enthält, oder aber beide Nummern i und $\varkappa$ enthält, so verwandelt die Operation alle Elemente dieser Zeile in Nullen, und es ist $\Theta' = 0$.

Enthält aber C zwar die Nummer $\varkappa$, aber nicht die Nummer i, so verwandelt die Operation alle Elemente dieser Zeile (abgesehen vom Vorzeichen) in die der Kombination C' entsprechenden, wo C' aus C entsteht, indem $\varkappa$ durch i ersetzt wird. Da aber $i < \varkappa$ und das Kombinationensystem nach unten geschlossen ist, so findet sich die zu C' gehörige Zeile in der Determinante (4.) bereits vor, und es ist $\Theta' = 0$ als Determinante mit zwei gleichen Zeilen.

Das Theorem des Artikels 3 ist daher nunmehr vollständig bewiesen.

8.

Das Theorem des Artikels **3** *läßt sich auf die bekannten etwas allgemeineren Determinantenbildungen von* ***Picquet*** *übertragen.*

Es sei außer der Matrix (1.) noch eine zweite Matrix

$$(8.)\qquad \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{matrix}$$

gegeben, deren Elemente wir uns ebenfalls als unabhängige Variable denken.

Neben den Kombinationen (2.) betrachten wir noch ihre Ergänzungskombinationen

$$C_1', C_2', \dots C_\varrho',$$

wo also C_i' aus den $n-\varrho$ Nummern der Reihe $1, 2, \dots n$ besteht, welche in C_i fehlen. Wir schreiben wieder für einen Augenblick in jeder der Kombinationen C_i und C_i' die ϱ bzw. $n-\varrho$ Nummern in einer bestimmten, willkürlich gewählten Reihenfolge und nennen die so geschriebenen Kombinationen I_i und I_i'; jedoch sollen die Reihenfolgen der Nummern so gewählt sein, daß die Aneinandersetzung I_i, I_i' eine gerade Permutation von $1, 2, \dots n$ ergibt. Wenn nun I_i und $I_\varkappa'$ lauten $\alpha\beta\dots\varepsilon$ und $\lambda'\mu'\dots\nu'$, so verstehen wir diesmal unter $\Delta_{i\varkappa}$ die Determinante

$$\Delta_{i\varkappa} = \begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \dots & a_{1\varepsilon} & b_{1\lambda'} & b_{1\mu'} & \dots & b_{1\nu'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\alpha} & a_{n\beta} & \dots & a_{n\varepsilon} & b_{n\lambda'} & b_{n\mu'} & \dots & b_{n\nu'} \end{vmatrix}$$

und bilden wieder, nur mit dieser neuen Bedeutung der $\Delta_{i\varkappa}$, nach (4.) die Determinante Θ. Unter dem Kombinationensystem von Θ verstehen wir $[C_p, C_q, \dots C_s]$ allein, da die C' durch die C schon mitbestimmt sind.

Die Determinante Θ ist eine ganze rationale Funktion der a und b, homogen in jeder Spalte von (1.) und (8.) und besitzt die beiden folgenden Eigenschaften:

I. Ersetzt man alle a durch die gleichstelligen b, so wird Θ eine Potenz der Determinante der Matrix (8.).

Denn die Diagonalelemente in (4.) werden gleich dieser Determinante, die andern $= 0$.

II. Die Funktion $\Theta_{(i)}$, welche aus Θ entsteht, indem man die Spalte $a_{.i}$ durch die Spalte $b_{.i}$ ersetzt, genügt (für jedes $\varkappa$) der Differentialgleichung

$$\left(\frac{b_{.i}\partial}{\partial a_{.\varkappa}}\right)\Theta_{(i)} = 0.$$

Beweis: In dem Kombinationensystem von Θ seien $C_\sigma \dots C_\tau$ diejenigen Kombinationen, welche die Nummer i enthalten, $C_\pi \dots C_\omega$ die übrigen. Wir betrachten zuerst in (4.) diejenigen Zeilen, welche $C_\sigma \dots C_\tau$ entsprechen; sie enthalten lauter solche Determinanten Δ, in welchen die Spalte $a_{.i}$ vorkommt. Wir betrachten sodann in (4.) diejenigen Spalten, welche den Kombinationen $C'_\pi \dots C'_\omega$ entsprechen; sie enthalten lauter solche Determinanten Δ, in welchen die Spalte $b_{.i}$ vorkommt. Betrachten wir endlich in (4.) die Schnittpunkte der genannten Zeilen und Spalten, so tragen diese solche Δ, in welchen sowohl die Spalte $a_{.i}$ als die Spalte $b_{.i}$ vorkommt, und die daher beim Übergang zu $\Theta_{(i)}$ in Nullen verwandelt werden. Mithin zerfällt $\Theta_{(i)}$ in das Produkt zweier Hauptdeterminanten, deren sämtliche Elemente solche Determinanten sind, in denen die Spalte $b_{.i}$ vorkommt. Hieraus erhellt aber, daß die Vollziehung von $\left(\frac{b_{.i}\partial}{\partial a_{.\varkappa}}\right)$ an $\Theta_{(i)}$ ein verschwindendes Resultat liefert. —

An Stelle der Determinanten (5.) führen wir die folgenden ein:

$$(9.) \qquad D_h = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1h} & b_{1h+1} \dots b_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nh} & b_{nh+1} \dots b_{nn} \end{vmatrix}$$

für $h = 0, 1, 2, \dots n$, wobei D_0 die Determinante von (8.), D_n die von (1.) bedeutet.

9.

Für die in Artikel 8 erklärten Determinanten Θ und die durch (9.) definierten D_h gilt nun der Satz:

Damit Θ in ein Potenzprodukt von $D_0, D_1, \ldots D_n$ zerfällt, ist notwendig und hinreichend, daß das Kombinationensystem von Θ nach unten geschlossen ist.

Die Notwendigkeit der Bedingung erhellt daraus, daß eine Zerlegung

$$\Theta = D_0^{\pi_0} D_1^{\pi_1} D_2^{\pi_2} \ldots D_n^{\pi_n}$$

durch die Spezialisierung

$$b_{ii} = 1, \; b_{ix} = 0 \, (i \neq x)$$

in (6.) übergeht. Bleibt zu zeigen, daß die Bedingung hinreichend ist.

10.

Lemma: Es werde die allgemeine Gestalt einer ganzen rationalen Funktion F der Elemente (1.) und (8.) gesucht, welche in den Elementen jeder Spalte von (1.) und (8.) homogen ist und folgende zwei Reihen von Bedingungen erfüllt:

$$(10.) \qquad \left(\frac{a_{.i}\partial}{\partial a_{.x}}\right) F = 0 \quad \text{für} \quad i < x,$$

$$(11.) \qquad \left(\frac{b_{.i}\partial}{\partial a_{.x}}\right) F_{(i)} = 0 \quad \text{für} \quad i > x,$$

wobei in der zweiten Reihe unter $F_{(i)}$ die Funktion verstanden wird, die aus F hervorgeht, wenn man die Spalte $a_{.i}$ durch die Spalte $b_{.i}$ ersetzt. Die gesuchte allgemeine Gestalt lautet

$$F = f(b) \, D_1^{\pi_1} D_2^{\pi_2} \ldots D_n^{\pi_n},$$

wo $f(b)$ eine willkürliche ganze rationale Funktion der Elemente von (8.) allein, in jeder Spalte von (8.) homogen, bedeutet.

Beweis: F genügt insbesondere den Differentialgleichungen

$$\left(\frac{a_{\cdot i}\partial}{\partial a_{\cdot n}}\right) F = 0 \text{ für } i < n,$$

mithin ist nach dem in Artikel 5 erörterten Prinzip:

$$F = Q \cdot D_n^{\pi_n},$$

wo die ganze rationale Funktion Q von den $a_{\cdot n}$ frei ist.

Die Differentialgleichungen (10.), (11.) übertragen sich, da auch D_n ihnen genügt, von F auf Q.

Insbesondere genügt Q den Differentialgleichungen

$$\left(\frac{a_{\cdot i}\partial}{\partial a_{\cdot n-1}}\right) Q = 0 \text{ für } i < n-1, \left(\frac{b_{\cdot n}\partial}{\partial a_{\cdot n-1}}\right) Q = 0,$$

da $Q_{(n)} = Q$ ist, und wir schließen wieder nach jenem Prinzip:

$$Q = P \cdot D_{n-1}^{\pi_n - 1},$$

wo P auch von den $a_{\cdot n-1}$ frei ist.

Die Differentialgleichungen (10.), (11.) übertragen sich von Q auf P usw. — Die Umkehrung ist unmittelbar einleuchtend.

11.

Um nun den Beweis des Satzes aus Artikel 9 zu Ende zu führen, nehmen wir an, das Kombinationensystem von Θ sei nach unten geschlossen.

Dann tritt neben die allgemeinen Eigenschaften I, II (Artikel 8) noch die besondere

III. $$\left(\frac{a_{\cdot i}\partial}{\partial a_{\cdot \varkappa}}\right)\Theta = 0 \text{ für } i < \varkappa.$$

Die Eigenschaften II und III ermöglichen die Anwendung des in Artikel 10 bewiesenen Lemmas, und die noch unbekannte Funktion $f(b)$ des Lemmas bestimmt sich aus Eigenschaft I als eine Potenz von D_0. Damit ist der Satz bewiesen.

Berichtigungen zur Arbeit „Kettentheorie und Wohlordnung“

von G. Hessenberg.

Seite 96 Zeile 10 von unten statt (XXIIa) lies (XXIIb)
„ 100 „ 9 „ oben „ (VIIIc) lies (VIIIb)
„ 100 „ 6 „ unten „ $\mathfrak{S}\mu = M$ lies $\mathfrak{S}M = \mu$
„ 101 „ 3 „ oben „ $\mathfrak{VDB}_1$ lies $\mathfrak{VDB}_1\mathfrak{V}$
„ 101 „ 13 „ oben „ $\mathfrak{B}\{\alpha+\beta+\gamma+\cdots\}$ lies $\mathfrak{B}(\alpha+\beta+\gamma+\cdots)$
„ 104 „ 7 „ unten „ § 52 lies § 62
„ 105 „ 13 „ oben „ $\mathfrak{S}A$ lies $\mathfrak{D}A$
„ 107 „ 7 „ oben „ $\mathfrak{N}_1 A$ lies $\mathfrak{N}_1$A
„ 116 Fußnote, statt „hinzugesetzt“, ließ „unten angesetzt“
„ 118 Zeile 16 von oben statt $\mathfrak{S}_e^* \mathfrak{B}\alpha$ lies $\mathfrak{S}\mathfrak{B}_e^* \alpha$
„ 119 „ 1 von oben statt $\mathfrak{B}\lambda\alpha$ lies $\mathfrak{B}^\lambda\alpha$
„ 125 Zeile 13 von oben statt $\{\alpha\}$ lies $\{0\}$
„ 131 Fußnote statt „G-Ketten“ ließ „G Ketten“.

UNIV. OF MICH.
MAR 9 1909

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 135.

Heft IV.

Ausgegeben den 15. Februar.

Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1909.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 14.—.

Band 135. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

Bohl, P., Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem (Fortsetzung) . . . . . Seite 237
Thue, Axel, Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen . . . . . — 284
Fischer, Ernst, Verallgemeinerung des *Sylvester*schen Determinantensatzes . — 306

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

VERLAG VON GEORG REIMER BERLIN W. 35.

Dr. A. L. CRELLE's

RECHENTAFELN

welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen.

NEUE AUSGABE besorgt von **O. SEELIGER**

Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1—1000

Preis solid in Ganzleinen gebunden Mark 15.—

——— *Neben der neuen Ausgabe wird die alte Ausgabe fortgeführt.* ———

Die Crelle'schen Rechentafeln sind erneut amtlich empfohlen durch Verfügung des Finanzministers vom 12. Juni 1882 und Erlaß des Ministers der öffentlichen Arbeiten vom 21. Juni 1905.

Tafeln der Funktionen cosinus und sinus

mit den natürlichen sowohl reellen als rein imaginären Zahlen als Argument (Kreis und Hyperbelfunktionen)

von **Dr. Carl Burrau.**

Preis gebunden M. 4.—

G. Lejeune Dirichlets Werke

Herausgegeben auf Veranlassung der **Königl. Akademie der Wissenschaften**

von **L. Kronecker.**

2 Bände mit Dirichlets Bildnis. Band I M. 21.—; Band II M. 18.—

Beziehungen des Du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes zur Ovaltheorie.

Eine mathematische Studie

von **Hermann Brunn.**

Preis broschiert M. 7.—

Verlag von Georg Reimer Berlin W. 35.

Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

begründet von **Carl Ohrtmann.**

Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung von **Felix Müller, Albert Wangerin, Erich Salkowski** sowie der **Berliner Mathematischen Gesellschaft**

herausgegeben von **Emil Lampe.**

Jährlich ein Band von 3 Heften zu verschiedenen Preisen.

J. Ch. Burckhardt

Tables des Diviseurs pour la 1. à la 3. Million

Neudruck

Subskriptionspreis: M. 32.— (nach Erscheinen M. 40.—).

Von diesen ganz vergriffenen Tafeln ist ein anastatischer Neudruck, der dem Original nicht nachsteht, in Vorbereitung, in der Art der von mir herausgegebenen Neudrucke der Sternkataloge von Piazzi und Weisse.

Subskription bitte **umgehend** zu senden an:

W. JUNK, Buchhandlung für Mathematik,
BERLIN W. 15,
Kurfürstendamm 201.

VERLAG VON GEORG REIMER BERLIN W. 35.

Die nutzbaren Mineralien und Gebirgsarten
im Deutschen Reich

auf Grundlage des gleichnamigen von Dechenschen Werkes neu bearbeitet
unter Mitwirkung von **H. Bücking**
(ord. Professor an der Universität Straßburg)
durch **W. Bruhns**
(a. o. Professor an der Universität Straßburg)

Ein Band 8° 852 Seiten mit einer geologischen Karte
Preis geheftet M. 16.—, in Halbfranz gebunden M. 18.50

Von Dechens rühmlichst bekanntes Buch ist durch die Straßburger Professoren Bruhns und Bücking auf das eingehendste durchgearbeitet und auf den Stand von heute gebracht worden. Ein sehr reiches Register ermöglicht schnelles Auffinden jedes Ortes und jeder Materie.